This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

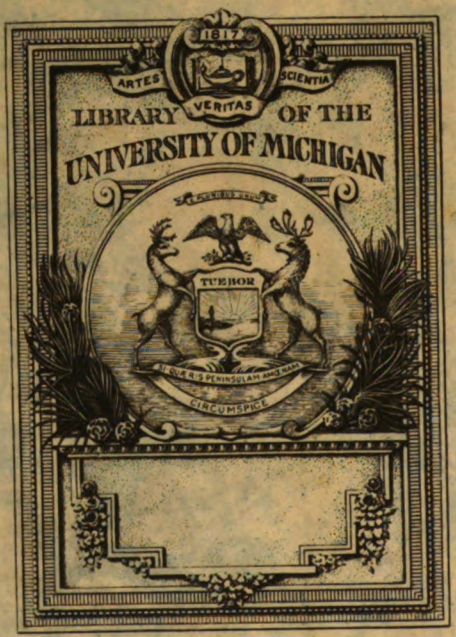
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

QA
35
.S94

Digitized by Google

Suardi, Giovanni Battista, 1711-1767

TRATTENIMENTI MATEMATICI
DEL
CONTE GIAMBATISTA SUARDI
BRESCIANO
DELL' ACCADEMIA DELL' INSTITUTO
E CLEMENTINA DI BOLOGNA
E DEGLI
AGIATI DI ROVEREDO.

IN BRESCIA MDCCLXIV.
Dalle Stampe di GIAMBATISTA BOSSINI
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Digitized by Google

Digitized by Google

AMICO CARISSIMO.

L'Affezione delle persone molte volte nuoce agli amici quando meno il vorrebbero, perchè gl' inducono a far cose che spesso tornano lor male, le quali prevenuti essi da un troppo favorevole giudizio, credettero che fossero ben fatte. Così Voi mi fate forza a comunicarvi alcune delle cose mie, perchè una vera semplicità, come Voi dite, ve le rende aggradevoli, senza badare poi che quando sono dappoco, sciocche o sarde non piaceranno a Voi, e quanto prima da quelli, ai quali per gentilezza Vostra capiteranno alle mani, verranno o biasimate, o almeno avute in dispregio. Voi ben sapete che di uno scritto bisognerebbe poter dire: numquam accedo, quin abs te abeam doctior, e per ciò dire troppe più condizioni son d' uopo, eleganza, chiarezza, novità, l' adempimento delle quali sovente agevole non riesce. Imperocchè la eleganza dello stile, oltrecchè va secondo i tempi alla moda, soffre poi anche molte censure per parte del genio e del capriccio. Per la seconda tutti gli Scrittori credono di comunicarsi altrui con infinita chiarezza, perchè producendo i loro pensieri in quella guisa che la testa loro me-

meglio li concepiſce, ſi danno a credere di dover eſſere non tanto perfettamente inteſi, quanto inteſi più che per la eſpoſizione di qualunque altro. Quindi per ordinario gl' innumerabili elementi di Geometria, gl' infiniti corſi d' Arimmetica, Matematica, Fiſica ec. ma non riflettono che non eſſendo tutte le teſte fatte ad un modo, ſperimentiamo ſpeſſo che il modo di concepire di quella dell' Autore non ſi addatta alle altre teſte.. Finalmente è troppo difficile luſingarſi di novità nelle proprie produzioni; conciosiacchè biſognerebbe, ciocchè è impoſſibile, aver letto il leggibile per procurarſi una ſicura notizia di tutti gli altrui ritrovamenti. Ma io ſenza dar retta a tanti ſcrupoli, volontieri vi compiaccio, perchè deveſi talvolta alcun diſcapito ſacrificare alla buona volontà di quelli che ci ſono parziali, e pai non avendo che cinque ſoli e brevi Trattenimenti Matematici da preſentarvi, potete credere quanto mi caglia, quando pur gli altri non me ne ſapeſſero buon grado, di procacciarmi con così piccioli mezzi il voſtro aggradimento, e di ſecondare l' indole mia con ogni ſtudio ai voſtri deſiderj diſpoſta.

Quia ſciebam dubiam fortunam eſſe ſcenicam,
Spe incerta, certum mihi laborem ſuſtuli.

PRE-

Digitized by Google

Lib. Com.
Magazine
2-14-28
15615

PREFAZIONE.

LAsciando ſtare tutti quelli che mandano alla luce le coſe loro o per vil mercede, o per piacere di diſpiacere a molti, de' quali la favola per ordinario ſi ſcioglie con qualche funeſto accidente, nè poſſono nella ſchiera de' politi e bencreati Scrittori aver luogo; quei ſoli che pur guidati da nobile intenzione cura ſi prendon ſoltanto di rendere il lor nome immortale, ſpeſſo ſul più bel verde trovarono le mal concepite loro ſperanze deluſe. La cagione di così fatta ſciagura ſuol eſſere l' amor di noi ſteſſi, onde crediamo che quanto dalla noſtra mente ſi ſpreme a fatica, e ſi produce, come bello e pregevole debba procacciarſi il pubblico favore; quando per contrario parecchie volte accade, che riuſcendo coſa inetta e dappoco, piuttoſto vergogna e triſtezza ne riportiamo.

MP. 4-16-40

Digitized by Google

Molti per ſottrarſi alle inſidie di queſto amore, hanno per coſtume di ſottomettere le loro opere d' ingegno all' eſame de' dotti, e diſcreti amici, nel di cui giudizio s' acquetano; ma queſto ſpediente non torna ſempre in bene, concioſiachè queſti non d' altro talvolta ſolleciti, che di trarſi d' attorno una sì fatta noja, dopo averne traſcorſe alcune pagine, di falſe lodi caricando l' autore, gli rendono in un con lo ſcritto un cattivo ufficio.

Rivolgendo dunque fra me come non poteſſe eſſere nè dall' umano petto una cotal paſſione divelta, nè con l' ajuto altrui del tutto rimoſſi gli effetti, ſcorrendo d' uno in altro penſiero a conſiderare pervenni, che que' grand' uomini che più furono di ſecolo in ſecolo celebrati, ſcopritori ſi diedero a conoſcere di qualche benchè imperfetto ritrovamento. Tanto baſtò perchè mi pareſſe di poter quindi fiſſar ſiſtema, e con ragion ſtabilire che chiunque agogna di render chiaro il nome ſuo, ingegnar debbaſi con ogni ſtudio di produr ſempre alcuna foſſe pur anche picciola novità.

Mi-

Digitized by Google

Mirando io perciò a questo scopo pubblicai anni sono alcune cosette mie intorno alla descrizione organica di diverse curve; delle quali, benchè alcune poche, come m' accorsi dappoi, fossero già state molto tempo innanzi inventate da altri, pur non ostante le altre molte, forse non d' altro fregio ornate che di quello della novità, vennero con approvazione e con piacere ricevute. Onde ho preso animo anche presentemente di offerire con la stessa lusinga al pubblico questi pochi Trattenimenti Matematici, che se non altro compariranno vestiti dello stesso carattere, come dalla breve contezza che or ora ne do, si può raccogliere. Conciosiachè:

Nel primo Trattenimento trattasi del valore delle Corone, e degli Anelli; del valore di un triangolo isoscele e di un cono supposto con l' asse rivolto su la periferia di un circolo; di un piano parimenti che s' aggira a cocclea intorno ad un cilindro retto, e di un altro solido che a cocclea pure si piega intorno ad un anello. Termina il Trattenimento con la descrizione per punti di di-

verſe curve apparenti da diverſe ſezioni dell' anello medeſimo .

Il valore delle corone , e degli anelli con alcuni corollarj riſulta quello ſteſſo che deriva , o ſi può derivare dal ſiſtema del Goldino ; ma le dimoſtrazioni ſono nuove e faciliſſime ; ſiccome è nuovo , e facile , e mio tutto il rimanente .

Il Trattenimento ſecondo eſpone la maniera di fabbricare una ſtrada a ſpirale che ſalga ad una vetta , e un' altra che ſcenda ad una profondità . Onde mi viene in deſtro di ſtabilire il valore di certi piani a ſpirale , che non ſo che da altri ſia ſtato finora determinato . Reco pure la miſura della ſtrada propoſta , e il valore della maſſa e della ſuperficie del ſolido che la ſoſtiene , e chiudo il Trattenimento con gli uſi , a' quali ſarebbe addattabile una tal fabbrica .

Nel terzo Trattenimento in primo luogo eſpongo come ſi riduca in piano una ſpirale (che chiamo *devoluta*) eguale ad un' altra che s' aggira intorno a un cono detta da me *conica* . Secondariamente moſtro che la miſura delle ſpirali *coniche* procede come quel-

la

Digitized by Google

la delle *devolute*. Terzo. Che gli ſpazj ſpirali *conici* procedono anch' eſſi come gli ſpazj ſpirali piani. Quarto. Finalmente eſpongo in ſuccinto il modo di calcolare il valore di un piano che a cocclea s' attortigli intorno ad un cono.

Il quarto Trattenimento verſa ſopra diverſi Problemi di Catottrica, e Diottrica, e prima dati i punti d' onde parte, e dove và un corpo elaſtico, determinare il punto di rifleſſione in un piano acceſſibile o inacceſſibile; così pure determinare quanti più piace punti di rifleſſione in due piani paralleli, in due convergenti, in tre, in quattro, ec. Coſtruzioni tutte nuove. Secondariamente ragiono della rifleſſione ſenza fine: cioè determino i punti di rifleſſione che un corpo moſſo dovrebbe perpetuamente percorrere, ſe perpetua foſſe la forza motrice, in un poligono regolare o irregolare; ritrovamento, ſe non erro, noviſſimo. Terzo. Paſſo a ſtabilire per mezzo di un Iſtromento i punti di rifleſſione che nella *concava*, o *conveſſa* periferia di un circolo poſſono occorrere. Quarto. Finalmente con un' altra Macchi-

netta ; primo rilevo che d' infiniti raggi paralleli , che da un mezzo raro vadano a rifrangerſi nella periferia di un circolo più denſo , due ſoli poſſono concorrere in un punto dato nella ſua area ; ſiccome due ſoli concorrono in un punto dato fuori dell' aſſe di una sfera ; ma moſtro che ſono infiniti, caſo che il punto dato ritroviſi nel detto aſſe. Quindi poi ne deduco , applicando alla Terra queſta teoria , la vera ragione per cui nella zona torrida i raggi ſolari ſieno più intenſi che altrove . Non laſcio di rimarcare che la macchinetta regge tuttavia , ſieno i raggi incidenti paralleli , o divergenti , e ſiaſi il mezzo d' onde partono , più denſo o più raro del mezzo in cui vanno a rifrangerſi .

Nel quinto ed ultimo Trattenimento , che diverſe coſe contiene , eſpongo primieramente una attuale proſſima quadratura di circolo eſeguibile facilmente ſu la carta o ſul terreno . Secondo . Eſibiſco un quadrato eguale alla ſomma di tutt' i quadrati eretti ſui lati di un 8gono. Terzo. Inſegno la maniera di trovare geometricamente , e in numeri , un medio armonico , o contrarmonico

fra

Digitized by Google

fra il primo e terzo termine dati. Quarto. Dato un triangolo isoscele in un circolo, indico come per mezzo di una curva si possa nel medesimo circolo delinearne un altro isoperimetro. Quinto. Finalmente descrivo detta curva, che è di quarto grado, per punti, e meccanicamente.

Queste sono tutte le poche scoperte in picciol Volume ristrette che applico, dove la materia il permette, a qualche uso, e che esibisco da scorrere per divertimento; bastando a me per mercede anche soverchia dell' opera mia che vengano accolte con quell'aggradimento, che come nuove dovrebbero pur meritarsi.

Digitized by Google

NOI RIFORMATORI

DELLO STUDIO DI PADOVA.

AVendo veduto per la Fede di Reviſione, ed Approvazione del P. *F. Angelo Gattelli* Inquiſitor Generale del Sant' Officio di *Breſcia*, nel Libro intitolato: *Trattenimenti Matematici del Conte Giambatiſta Suardi* ec. non v' eſſer coſa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimenti per atteſtato del Segretario Noſtro, niente contro Principi, e buoni coſtumi, concediamo Licenza a *Giambatiſta Boſſini* Stampator *in Breſcia*, che poſſa eſſere ſtampato, oſſervando gli ordini in materia di Stampe, e preſentando le ſolite Copie alle Pubbliche Librerie di Venezia, e di Padova.

Dat. li 7. Settembre 1763.

Sebaſtian Juſtinian Rif.

Alviſe Vallareſſo Rif.

Regiſtrato in Libro a Carte 180. al Num. 993.

Davide Marcheſini Seg.

IN-

Digitized by Google

INDICE

Delle Materie contenute in queſt' Opera.

TRATTENIMENTO I.

INtorno al valore de' piani e ſolidi circolari. Pag. 1

ARTICOLO I.

Del valore delle corone. 2

ARTICOLO II.

Del valore dei triangoli piani con l' aſſe ordinato nella periferia di un circolo. 13

ARTICOLO III.

Del valore degli anelli. 17

ARTICOLO IV.

Valore di alcuni piani e ſolidi formati a cocclea ſu la ſuperficie di un cilindro retto. 19

ARTICOLO V.

Valore di un altro ſolido ravvolto in cocclea intorno ad un anello, o cilindro circolare. 22

ARTICOLO VI.

Solidità dei coni con l' aſſe ritorto circolarmente. 25

A R-

Digitized by Google

ARTICOLO VII.

Solidità dei coni con l' asse attortigliato su la superficie di un cilindro retto, e di un anello, o cilindro circolare. 26

ARTICOLO VIII.

Delle curve che appariscono nella diversa sezione dei cilindri, o dei coni che hanno l' asse ripiegato intorno a un circolo. 27

ARTICOLO IX.

Descrizione per punti delle suddette curve. 30

TRATTENIMENTO II.

Circa al valore di alcuni piani e solidi dipendenti dalla spiral d' Archimede. 32

ARTICOLO I.

Alcune osservazioni sopra le spirali Archimedee. 36

ARTICOLO II.

Origine di questi solidi, e della strada a spirale, o piano inclinato che sostengono. 40

ARTICOLO III.

Valore del piano orizzontale dei quattro solidi rappresentati nelle Fig. 28. 29. 30. 31. 43

ARTICOLO IV.

Valore del piano elevato, o sia strada a spirale sostenuta dai solidi suddetti. 63

A R-

ARTICOLO V.
Della ſuperficie verticale dei ſolidi ſuddetti . 72

ARTICOLO VI.
Maſſa dei ſolidi ſuddetti . 77

ARTICOLO VII.
Maniera di eſeguir ſul terreno una ſtrada elevata a ſpirale . 80

ARTICOLO VIII.
Degli uſi di queſta fabbrica . 89

TRATTENIMENTO III.

Sopra le ſpirali coniche , e certi piani che girano a ſpirale intorno a un cono . 91

ARTICOLO I.
Delle ſpirali deſcritte intorno al cono . 91

ARTICOLO II.
Valore degli ſpazj ſpirali chiuſi fra gli avvolgimenti di una ſpirale conica . 103

ARTICOLO III.
Valore di un piano ravvolto a ſpirale intorno a un cono . 108

TRATTENIMENTO IV.

Di Catottrica , e Diottrica . 113

A R-

Digitized by Google

ARTICOLO I.
Della riflessione che ha principio e fine . 113

ARTICOLO II.
Della riflessione senza fine . 136

ARTICOLO III.
Della riflessione nel circolo . 150

ARTICOLO IV.
Di Diottrica , o sia della Rifrazione . 157

TRATTENIMENTO V.

Miscellanea . 167

ARTICOLO I.
Circa certe quadrature . 167

ARTICOLO II.
Della Proporzione Armonica e Contrarmonica . 179

ARTICOLO III.
De' Triangoli isoperimetri nel circolo , e di una curva applicata agli stessi . 184

TRAT-

Digitized by Google

TRATTENIMENTO I.

Intorno al valore de' Piani, e Solidi circolari.

POsso dire con ingenuità, che di quel poco che io so, comecchè sia pochissimo, ne devo pure tutto il merito alla curiosità, e alla inclinazione di osservare ciò che per accidente mi si para innanzi. Imperocchè siccome non sono nelle Scienze avvanzato se non tanto, quanto potrebbesi pretendere da un dilettante che si occupa per piacere, e non per impegno, così nè la fatica, nè l' emulazione, nè la brama d' acquistar lode ebbero gran parte nelle mie tenui applicazioni. Fu perciò una sola osservazione che diede occasione a questo primo Trattenimento, mentre tenendo a caso fra mani due pezzi di carta rettangolari *b t f d*, *l r x k* (*Fig.* 2.) e combinandoli per trastullo quando in un modo, e quando in un altro, finalmente come sortirono quella situazione che la figura rappresenta, mi cadde in animo d' indagare, come si stesse la porzione *r s f e* che si sopraggiunge per di dentro dell' angolo, alla porzione *d b l e* che manca per di fuori, e quindi ne trassi certe mie proprie dimostra-

zioni, le quali tanto più credetti di doverle conservare ne' miei Scritti, quanto da più picciolo principio erano dedotte.

ARTICOLO I.

Del valore delle Corone.

LE *Corone circolari* (*Fig.* 4. e 7.) delle quali in primo luogo intendiamo di ragionare, altre si chiamano *aperte*, ed altre *chiuse*, secondochè sono vuote (*Fig.* 4.), o piene (*Fig.* 7.) fino al centro; e si concepiscono come generate dalla flussione di una retta, o raggio *m n*, che gira intorno a un centro R detto il *polo* della Corona. La *m n* chiamasi la *retta generatrice*. Il piano *m g*, su cui volgesi detta retta *m n*, il *piano di rotazione* appellasi. Non altrimenti gli Anelli sono solidi (*Fig.* 20.) generati dalla flussione di un *piano generatore m n* ec. Rimarcherò per tanto che dal centro di gravità, metodo applicato (1) dal P. Guldino alle misure, deriva che il piano di una Corona *m n g* (*Fig.* 4. e 7.) sia eguale al prodotto della *media periferia e g*, o *via di rotazione*, nella retta *generatrice m n* normale a detta periferia; e così pure la solidità di un anello (2) (*Fig.* 20.) eguale alla media periferia *e g*, o asse dell' anel-

(1) Metodo dimostrato dal P. Tacquet, *Cylind. & Annul. L.* 5.
(2) Abbiamo dal medesimo celebre Autore la *Teoria degli Anelli* ne' Lib. I. II. III. IV.

Digitized by Google

anello, nella sezione, o *piano generatore mn*. E questo è appunto quel medesimo che è accaduto anche a me di dimostrare in una maniera affatto diversa, cioè per quella de' *desinenti* .

PROPOSIZIONE.

La Corona *aperta mng* (*Fig.* 4.) è eguale al prodotto della normale *mn* nella media periferia *eg*, che divide detta normale per metà, cioè dico che la Corona $mng = mn \times eg$.

DIMOSTRAZIONE.

Primo . Il rettangolo $htdf$ è $= hd \times ht$ (*Fig.* 1. 5. 8. e 9.); e se dalle metà *g* ed *e* dei lati *ht*, *df* si conduca una retta *ge* parallela agli altri due lati *hd*, *tf*, ed un' altra *mn* normale a detti lati, sarà detto rettangolo $htdf$ parimenti $= ge \times mn$; perchè $ge = hd$, $mn = ht$ per la costruzione. Ora condotte per li punti *g* ed *e* le oblique *au*, *bs* fino all' incontro dei lati *tf*, *hd* prodotti, risulteranno li triangoli *edb*, *efs* simili; perchè li due angoli *edb*, *efs* sono retti; li due *deb*, *fes* al vertice opposti; e li due *dbe*, *fse* alterni. E saranno pure eguali, perchè sono in ragion dei loro lati omologhi *de*, *ef*, che sono per la costruzione eguali. E così dall' altra parte per la medesima ragione saranno simili ed eguali li triangoli *gha*, *gtu*. Quindi sostituendo li due triangoli *edb*, *gha* in luogo delli due tolti via *efs*, *gtu*, ne verrà il trapezio *ausb* = al. rettangolo *htdf*; ma il rettan-

golo $htdf = ge \times mn$, come sopra. Dunque il trapezio $ausb = ge \times mn$.

Secondo. La superficie dunque di due trapezj egualmente alti (*Fig.* 2.) $ausb$, $bsqo$ posti l' uno appresso all' altro sotto qualunque angolo gep, sarà $= mn \times \overline{ge + ep}$; ovvero $= mn \times 2ge$, supposto $ge = ep$. Perchè in fatti li due trapezj sono eguali ai due rettangoli $htfd$, $lrxk$, ai quali, per ciò che ho mostrato or ora, vi si aggiunge per di fuori il rettilineo $dble =$ alla porzione che si sopraggiunge per di dentro, cioè eguale al rettilineo che svanisce $rsfe$. Dunque uniti insieme (*Fig.* 3.) molti trapezj sotto qualunque angolo gep disposti l' uno appresso all' altro nella periferia di un circolo, ne risulterà un piano, o *Corona angolare*, chiusa fra due poligoni simili, la superficie della quale sarà $= mn \times ge$ tante volte presa, quanti sono i lati dei poligoni. Nel caso della Figura sarà $= mn \times 6ge$; supposti i poligoni regolari.

Terzo. Ma siccome un poligono multiplicando i suoi lati all' infinito, va finalmente (1) a terminare in un circolo; così la *Corona angolare* andrà (*Fig.* 4.) a risolversi in una *Corona circolare*, la superficie della quale sarà tuttavia $= mn$ moltiplicata per infinite rette ge, cioè per la periferia media aritmetica ge, *o via di rotazione*, che divide per metà la normale mn, e che equivale alla circonferenza di un poligono d' infiniti lati. Sarà dissi la Corona *aperta* $mng = mn \times eg$. Il che era ec.

Co-

(1) Eucl. p. 2. l. 12.

Digitized by Google

COROLLARIO I.

Giacchè un triangolo (*Fig.* 5.) *abn* non è altro che un trapezio *ausb* della Fig. 1. di cui il lato *us* (o per l' approſſimarſi delle convergenti *au*, *bs*; o per lo ſcoſtarſi delle parallele *ab*, *us*) diminuendoſi fino a zero diſparve; perciò detto triangolo *abn* (*Fig.* 5.) ſia tuttavia = *mn* X *ge*. Il che va d' accordo con la Geometria, perchè il triangolo *abn* è eguale al prodotto dell' altezza *mn* nella metà della baſe *ab*; ma *ge* è eguale alla metà della baſe, perchè *nb.ba* :: *ne.eg*, ed alternando *nb.ne* :: *ba.eg*, ed eſſendo per la coſtruzione diviſa *nb* per metà in *e*, ne viene *nb.ne* :: 2. 1. Dunque parimenti *ba.eg* :: 2. 1. Dunque ec.

Se veniſſero ordinati nella periferia di un circolo (*Fig.* 6.) molti triangoli della Fig. 5. ne riſulterebbe un poligono pieno fino al centro, la di cui ſuperficie ſarebbe tuttavia = *mn* X *ge* preſa tante volte, quanti ſono i lati del poligono.

Moltiplicando poi i lati del poligono all' infinito, ſpariti gli angoli, la figura diventerebbe (*Fig.* 7.) una *corona chiuſa*, o ſia un circolo di cui in queſto caſo *mn* diventa raggio; e la ſua ſuperficie riſulta ancora = *mn* moltiplicata per la periferia media *eg* che la divide per metà. Ciò che è pure affatto conforme alle leggi geometriche: imperocchè l' area di un circolo è appunto eguale al prodotto del raggio nella metà della circonferenza; ma la circonferenza che paſſa per la metà del raggio, è appunto = alla metà della circonferenza del circolo, perchè

chè le circonferenze ſono, come i raggi loro. Dunque ec.

COROLLARIO II.

La prefata coſtruzione ci guida ad un' altra oſſervazione: Giacchè (qualunque angolo (*Fig.* 1. e 5.) alle linee *ht*, *df* facciano le oblique *au*, *bs*, rimovendo a piacere il loro punto di concorſo R, ovvero *n*) ſempre li trapezj che ne riſultano, ſono fra eſſi, ed al rettangolo *htdf* eguali, quando rimangono ferme e coſtanti la media *ge*, e la normale *mn*; quindi ſe per immaginazione leviamo in alto il centro R, ovvero *n*, cioè il punto di concorſo delle figure orizzontali 3. o 6. per farne una piramide; ovvero 4. e 7. o piuttoſto (*Fig.* 39.) per farne (*Fig.* 38.) un cono GQV, avviſando che *mh* ſia la ſezione della corona orizzontale *mh* eſpreſſa nella Fig. 37. leviamo, diſſi, in alto R, ovvero V, e ſpingendo detto centro ancora più oltre ſino all' infinito, la piramide (*Fig.* 3. e 6.) diventi un priſma, (*Fig.* 4. e 7.) ovvero (38.) il cono GQV diventi un cilindro *pdbq*, reſtando intanto ſempre ferma di poſizione, e ſempre a ſe ſteſſa eguale la media periferia *eg* dividente per metà la normale orizzontale *mn*, ovvero obliqua normale G*u*, ovvero verticale normale *pd* ſempre coſtanti, e ſempre eguali. Quindi, dico, la corona *mnth* (*Fig.* 37.), tutte le zone coniche (*Fig.* 38.) G*u*Q*a*, e cilindriche *pdqb* larghe quanto detta *mn*, che dallo ſtato primiero orizzontale *mn*, paſſando indi per tutti i gradi di obliquità qualunque G*u* di un quadrante *mp*, ovvero *nd*, giungano final-

Digitized by Google

nalmente alla ſituazione verticale *p d*, ſono ſempre eguali, perchè ſempre cadauna = al medeſimo prodotto *m n* X *g e*. Imperocchè quanta porzione di ſuperficie acquiſtano dette zone, e ſi dilatano al di dentro (*Fig.* 6.) o vogliam dire (*Fig.* 38.) al di ſopra della media *g e*, allargandoſi gli angoli interni *n e g*, *n g e*, perchè il punto di concorſo R, ovvero *n*, o orizzontalmente, o verticalmente ſi allontana; altrettanta preciſamente ne perdono, e ſi diminuiſcono al di fuori (o ſia al di ſotto (*Fig.* 38.) di detta media *g e*) reſtringendoſi gli angoli eſterni (*Fig.* 6.) *b e g*, *a g e*. Onde in ſomma ſono coſtantemente eguali le tre ſuperficie, cioè (*Fig.* 37. e 38.) la corona *m h*, la zona conica *u a* G Q, la zona cilindrica *p q b d*; e perciò aperto un largo campo di comparazione fra le corone, o zone circolari, piramidali, e coniche, priſmatiche e cilindriche, relative alli tre ſtati di poſizione orizzontale, obliqua, e verticale accennati di ſopra.

COROLLARIO III.

Li trapezj per una corona regolare diſpoſti (*Fig.* 1. e 5.) in un circolo, unica curva che ſempre inclini, e ſempre egualmente alla medeſima parte, biſogna che abbiano i lati *u a*, *s b* egualmente convergenti: cioè che facciano alle parallele *a b*, *u s*, gli angoli *u a b*, *s b a* eguali. Ma ſe ſono diſpoſti in una curva che inclina bensì, ma non egualmente alla medeſima parte, come l' Eliſſe, Parabola, Iperbola, Spirali ec. eſſi averanno i lati *a u*, *b s* diverſamente inclinati alla detta *a b*, ovvero *u s*, ſecondo che

che porta l' andamento della curva data. Ora perchè la coſtruzione ſi eſtende anche alli trapezj della Fig. 8. nei quali il lato *u a* inclina alla *a b* meno del lato *s b*, perciò ſeguita che anche la ſuperficie delle *Corone angolari* compreſe fra due ſimili qualunque curve convergenti, benchè non egualmente, dalla medeſima parte, ſia eguale alla normale *m n* moltiplicata nella media *g e* tante volte preſa, quanti ſono i lati della Figura. Inoltre terminando, ſiccome nel circolo, così in qualunque altra curva, Eliſſe, Parabola ec. il contorno de' poligoni inſcritti e circoſcritti, quando detta curva inclini, benchè non egualmente alla medeſima parte, quindi una *Corona angolare* compreſa fra due Eliſſi ſimili concentriche, o Parabole, o Iperbole, o Spirali ec. moltiplicando i lati della *Corona angolare* all' infinito, andrà a riſolverſi in una corona perfettamente o Elittica, o Parabolica, o Iperbolica ec. e perciò, mutato il mutabile, avrà luogo quanto ſi è rimarcato ne' Corollarj antecedenti.

COROLLARIO IV.

Eſſendo il trapezio della Fig. 9. compreſo anch' eſſo nella coſtruzione, anche i piani che ne derivano, come quello della Fig. 10. ſoggiacciono alle vicende comuni agli altri trapezj.

ANNOTAZIONI.

Primo. Intanto devo ſuggerire in primo luogo che il contorno di una *Corona angolare* (*Fig.* 3. e 11.) non può riuſcire continuo e ſeguito, ſe non quando i tra-

i trapezj per esempio *hbs*, *abs*, alla linea comune *bs* del loro accozzamento non hanno ogni coppia d'angoli contigui *hbs*, *abs* eguali. Imperocchè (*Fig.* 11.) menata *kq* in vece di *bs*, vediamo tosto che al di fuori del contorno seguito si sporge e soprabbonda il triangolo *kba*, siccome al di dentro detto contorno resta interrotto e difettivo del triangolo *soq*. Perciò quantunque accada che il valore della corona sia il medesimo, quando *kq* passa per *e* punto d' intersezione della linea *bs* colla media *ge*, perchè il triangolo *kba* = triangolo *soq*, come potrebbesi facilmente dimostrare; con tutto ciò se poi per detto punto *e* non passa, oltre il contorno imperfetto, abbiamo poi anche sovvertito il sistema della corona rispetto al suo valore. Per questa eguaglianza degli angoli *hbs*, *abs* assolutamente necessaria nello accozzamento che io dico, spesso mi è occorso di vedere gli artefici in grande imbarazzo, perchè non avendo essi, nel tirare per ornamento delle cornici spezzate, incamminato da lontano l' andamento di un pezzo di cornice rispetto ad un altro pezzo già fatto, cui dovevasi ad angolo unire, in modo che detti angoli risultassero eguali, le membrature poi e le file di un pezzo non andavano ad incontrarsi a dovere in quelle corrispondenti dell' altro pezzo, e quindi o bisognava stroppiare l' attacco di detti pezzi, o tornare da capo.

Secondo. Dalla Proposizione poi, e da' suoi Corollarj deriva anche la maniera di descrivere delle corone di qualsivoglia delle narrate specie in data ragione. Sia dunque proposto di trovare per esem-

pio una corona piana, o orizzontale, che ſia (*Fig.* 38.) alla zona conica *u a* G Q, ovvero cilindrica *p q b d*, come 1 a 3.

Se la G*u* del cono, ovvero *p d* del cilindro diviſe per 3 non ſono maggiori del raggio R*e*, ſi farà (*Fig.* 37.) R*e* = R*e* della Fig. 38; ed *m n* Fig. 37. $= \frac{Gu}{3}$, ovvero $\frac{pd}{3}$ della Fig. 38; e la corona piana che ne verrà, ſarà la propoſta.

Se poi (*Fig.* 38.) $\frac{Gu}{3}$, ovvero $\frac{pd}{3}$ foſſe maggiore di detto raggio R*e*, prenderebbeſi per maggior facilità la normale *m n* (*Fig.* 37.) della corona piana propoſta = al raggio R*e* della Fig. 38; ed il raggio R*e* della corona piana = $\varkappa$ quarta proporzionale di queſta analogia *m n*. R*e* :: $\frac{Gu}{3}$, ovvero $\frac{pd}{3}$. $\varkappa$. Così la corona che ne riſulterebbe = *m n* X $\varkappa$, ſarebbe eguale alla zona conica = R*e* X $\frac{Gu}{3}$, ovvero cilindrica = R*e* X $\frac{pd}{3}$; e ſarebbe anche tale che la normale *m n* non ſarebbe maggiore del raggio $\varkappa$, perchè *m n* = R*e* per la coſtruzione. Dunque $\frac{Gu}{3}$, ovvero $\frac{pd}{3} = \varkappa$. Ora $\frac{Gu}{3}$, ovvero $\frac{pd}{3} >$ R*e*

per

per ſuppoſizione. Dunque $x > mn$. Imperocchè ſi vede bene che la larghezza della zona conica o cilindrica maggiore del raggio della media periferia è un oſtacolo per deſcrivere una corona piana a dette zone eguale; al quale perciò così abbiamo trovato rimedio.

Terzo. Se foſſe pure propoſto di deſcrivere una *Corona aperta* eguale ad un'altra data *chiuſa*, o circolo per eſempio della Fig. 7. ſupponeremmo *mn* di detta Fig. 7. = A, ed il raggio generatore $ne = R$; poi a capriccio ſi prenderebbe un altro termine, ma più picciolo di A, che chiameremo B, e che ſarà la normale della corona propoſta. Indi troverebbeſi un quarto termine proporzionale a queſti tre, $= x$, onde foſſe B. A :: R. x. Dunque $Bx = AR$; e però la corona *aperta* che ne riſulterà, eguale al prodotto della normale B nella periferia del raggio x, ſarà eguale al prodotto della normale A nella periferia del raggio R, cioè eguale alla corona *chiuſa*, o circolo dato. Notate qui di paſſaggio che detta corona *chiuſa* della Fig. 7. è eguale alla ſuperficie della sfera *eg*. Imperocchè la ſuperficie della sfera è = 4 ſuoi circoli maſſimi *eg* (1). Ma il circolo *nm* è = 4 *eg*: perchè *nm*. *ne* :: 4. 1 quadrati dei raggi loro 2. 1. Dunque la corona aperta = $Bx = AR$ è pure eguale alla ſuperficie della sfera *eg*.

Quarto. Non è nemmeno da laſciare inoſſervato il rapporto che paſſa (*Fig.* 4.) tra la porzione della corona che ſta al di fuori della media periferia *eg*, alla porzione compreſa per di dentro verſo al polo R.

(1) Arch. *De Sphæra & Cylin.* p. 11.

Digitized by Google

Dico perciò che la porzione interiore ha tanto meno di quel che dovrebbe avere per arrivare alla metà del prodotto di $mn \times eg$, quanto più ne ha la porzione esteriore, proprietà ordinaria de' piani crescenti in proporzione aritmetica. Il rapporto poi di questo più e meno sta, come il raggio da R fino alla metà di em, al raggio da R fino alla metà di ne. Imperocchè la porzione esteriore si può considerare come una corona, di cui me fosse la normale; onde il suo valore sarebbe $= me \times \overline{Re + \frac{em}{2}}$.

Così supponendo che la porzione interiore sia un' altra corona, che ha per normale ne, il suo valore sarebbe (giacchè $ne = me$) $= me \times \overline{Re - \frac{em}{2}}$.

Questo s' intenda detto adoperando i raggi in vece delle periferie, perchè sono nella medesima proporzione, sempre che non si tratta del valore reale, ma rispettivo.

Nella corona *chiusa* poi della Fig. 7. la porzione interiore ne sta alla esteriore em sempre, come 1 a 3; perchè li raggi $ne.nm :: 1.2$; e però li circoli ne, nm, che sono in ragion duplicata di detti raggi, stanno come 1 a 4. Sottratto dunque il circolo $ne = 1$ dal circolo $nm = 4$, resta la corona $em = 3$

Digitized by Google

ARTICOLO II.

Del valore dei Triangoli piani con l' asse ordinato nella periferia di un circolo.

AD un' altra conseguenza niente meno elegante si estende la proposizione dell' Articolo antecedente, ed è il valore di un triangolo (*Fig.* 12.) il di cui asse *eg* incurvandosi abbia acquistata la piegatura di un circolo. Quantunque detta proposizione potrebbe perciò bastare, non ostante per maggior chiarezza passeremo alla seguente

PROPOSIZIONE.

Trasportati li due primi trapezj *abus*, *usth* del triangolo *abg* della Fig. 12. nella Fig. 13, e posti l' uno appresso all' altro sotto qualunque angolo *edf* dei loro assi *ed*, *df*. Dico che il rettilineo *dulq* che si aggiunge per di fuori, prolongando i lati *au*, *tq* fino all' intersecazione *l*, primo, è simile, secondo, è eguale al rettilineo *dsop*, che si sopraggiunge per di dentro.

DIMOSTRAZIONE.

Primo. L'angolo *udq* = angolo *sdp* al vertice opposto; l'angolo *lud* = angolo *tqd*; ma *tqd* = *opd* similmente posto; dunque *lud* = *opd*. L' angolo *lqd* = angolo *aud*; ma *aud* = *osd* similmente posto. Dunque *lqd* = *osd*. Sono dunque li tre ango-

angoli udq, lud, lqd del rettilineo esteriore $dulq$ eguali alli tre sdp, opd, osd del rettilineo interiore $dsop$, e quindi sarà anche il quarto angolo ulq del rettilineo esteriore eguale al quarto sop del rettilineo interiore; perchè essendo li quattro angoli presi insieme di qualunque rettilineo (1) eguali a quattro retti, sottraendo perciò dai quattro retti di un rettilineo, e dai quattro retti dell' altro rettilineo li tre angoli dell' uno trovati eguali alli tre angoli dell' altro, risulta il rimanente angolo ulq del rettilineo esteriore eguale all' angolo sop dell' altro rettilineo interiore, e però li due rettilinei esteriore ed interiore simili. Il che era la prima parte ec.

Secondo. Essendo poi per la costruzione li due lati ud, qd del rettilineo esteriore $dulq$ eguali alli due ds, dp del rettilineo interiore $dsop$, risultano eguali anche detti rettilinei, che sono in ragione di detti lati omologhi. Il che era l'altra parte.

COROLLARIO I.

Dunque poichè il rettilineo esteriore sostituito in luogo del rettilineo interiore, che sopraggiungendosi si perde e svanisce, è eguale a detto rettilineo interiore, perciò il piano $abohtla$ sarà eguale alli due trapezj presi insieme $abus + qpth$, cioè = alli due primi trapezj $abus + usth$ del triangolo abg della Fig. 12; e la misura di detto piano sarà conseguentemente quella medesima dei trapezj; sarà, dissi, per la regola ordinaria $= \frac{ab+th}{2} \times \overline{ed+df}$.

Quan-

(1) Tacquet. *Geom.* l. 1. p. 32; *Theo.* 1.

Quando tutti li trapezj della Fig. 12. si trovino disposti, come nella Fig. 14. con li assi ed, df ec. (che si vogliono supporre eguali) cioè con l'intiero asse eg del triangolo abg (*Fig.* 12.) ordinato nella periferia di un circolo; il rettilineo della Fig. 14. sarà eguale al triangolo suddetto abg: onde il valore di detto rettilineo viene $= \frac{ab+o}{2} \times \overline{ed+df+}$ ec. $= \frac{ab}{2} \times eg$.

Se poi moltiplicando il numero dei trapezj all' infinito, col supponere diviso il triangolo abg della Fig. 12. da infinite ordinate al suo asse disposte ad eguali distanze ed, df ec. gli assi parziali loro ed, df ec. diventino infinitamente piccioli, e perciò (*Fig.* 14.) tangenti il circolo edf ec. in cui vanno finalmente a terminare; allora il piano della Fig. 14. si trasforma nel piano della Fig. 15, dove è da rimarcare, che siccome la periferia eg si suppone eguale all' asse eg della Fig. 12, e sta in luogo di esso; così le ordinate che nella Fig. 12. sono normali all' asse, anche nella Fig. 15. sono normali alla periferia. Nella Fig. 12. sono crescenti in proporzione aritmetica, e così lo sono anche nella Fig. 15, e quindi i lati ag, bg del triangolo della Fig. 12. diventano nella Fig. 15. due spirali archimedee, precipua proprietà delle quali è che i raggi generatori siano come gli archi aritmeticamente proporzionali. E finalmente siccome la superficie del triangolo abg della Fig. 12. equivale al prodotto di $\frac{ab+o}{2} (= mn) \times eg$;

così

così la superficie del triangolo curvilineo della Fig. 15, è $= \frac{ab + o}{2}$ $(= mn) \times eg$ periferia.

COROLLARIO II.

Supposto che l' asse eg della Fig. 12. fosse stato tanto più lungo di quel che è, che nell' ordinare gli assi parziali ed, df ec. nella periferia $edfg$ della Fig. 14. avessesi dovuto ricorrere detta periferia più d' una volta; allora il piano angolare della medesima Fig. 14. avrebbe pure dovuto sopra se medesimo ravvolgersi più d' una volta, e dopo la trasformazione dell' angolare in circolare, dato che detto asse eg fosse per esempio stato doppio della periferia edf ec. sarebbe comparso quale la Fig. 16. lo rappresenta, ripiegato due volte a guisa di serpente intorno a un centro. La sua superficie poi sarebbe, come è chiaro (prese in conto anche quelle parti della Figura che si concepiscono come ricoperte da quelle che loro sopraستanno) eguale tuttavia ad $\frac{ab + o}{2}$ moltiplicato per la periferia eg, tante volte presa, quante sono le rivoluzioni di detto piano intorno al centro, le quali essendo due nel caso della figura, perciò detta superficie risulta (in vece di dire, come lo è $= \frac{ab + o}{2} \times 2eg) = ab \times eg$.

Co-

COROLLARIO III.

Se le Figure 12. 13. 14. 15. e 16. foſſero coſtrutte non già ſopra un triangolo, ma ſopra qualunque altro piano o parabolico, o iperbolico ec. di cui ne foſſe l' aſſe la retta *eg*, la propoſizione reggerebbe anche riguardo a detti piani. Imperocchè ſupponiamo che la Fig. 17. analoga alla Fig. 13. rappreſenti per eſempio una parabola con l' aſſe *edg* piegato in *d*, avviſando che dapprima il pezzo *ues* foſſe contiguo al pezzo *aqbp*, ed *us* coincideſſe con *qp*, e l' aſſe *edg* foſſe poſto in diretto. Ora piegato l' aſſe ſotto l' angolo *edg* qualunque, una porzione *dsop* ſi ſopraggiunge al di dentro dell' angolo, mentre un' altra porzione *dulq* reſta vuota al di fuori. Dico però che le due porzioni ſono ſimili, ed eguali; la dimoſtrazione è la medeſima ſu le medeſime lettere. Quindi eſſendo lo ſpazio *aqlueoba* = a quel medeſimo ſpazio che comprende la parabola quando è intiera, perciò detto ſpazio *aql* ec.

riſulta $= \frac{2ab}{3} \times \overline{ed+dg}$.

ARTICOLO III.

Del valore degli anelli.

NEmmeno per determinare il valore degli anelli abbiamo d' uopo d' altre dimoſtrazioni differenti da quella adoperata per ſtabilire il valore del-

Digitized by Google

le corone. Immaginiamoci (*Fig.* 18.) che dapprima *htdf* foſſe un priſma o un cilindro (terminato alle due eſtremità da due circoli *ht*, *df*, ciaſcheduno = *mn*) il di cui valore perciò riſulta = al prodotto della baſe *ht*, ovvero ſezione *mn*, nella ſua lunghezza *eg*, cioè = *mn* X *ge*. Ora ſupponiamo che dalla parte di *a*, e *b* ſiano ſtati aggiunti a detto cilindro due pezzi eguali a due altri toltigli via dalla parte di *u* ed *s*; coſicchè il cilindro regolare *htdf* ſia diventato l' informe tronco *aubs*, terminato alle due eſtremità non più da due circoli = *mn*, ma da due eliſſi *agut*, *besf*. Il valore di queſto ſolido così concepito ſarà nulladimeno = *mn* X *ge* media lunghezza tra le due differenti lunghezze acquiſtate nel trasformarſi *ab*, *us*, appunto perchè li due pezzi tolti via da una parte ſono per ſuppoſizione eguali agli due reſtituiti dall' altra parte. In ſomma tutto cammina del pari come nelle corone, ſalvo che dove ivi la *mn* era una retta, qui è un piano, e perciò non abbiamo che a richiamare a queſto luogo anche il reſto.

Molti tronchi dunque di cilindro *abus* (*Fig.* 19.) ſimili a quello della Fig. 18. diſpoſti intorno a un circolo formeranno un anello ſolido angolare, il di cui valore ſarà eguale al prodotto della ſezione circolare *mn* moltiplicata per la media *ge* tante volte preſa, quanti ſono i lati della figura, nel caſo noſtro = *mn* X 6*ge*.

Moltiplicando ormai i lati della Fig. 19. all' infinito, il ſolido ſi trasforma (*Fig.* 20.) in un *anello circolare*, il di cui valore riſulta = *mn* X *ge* periferia

ria media fra la periferia interna ed esterna dell' anello medesimo .

L' affare degli anelli conserva una perfetta analogia con quello delle corone; quindi rimarcherò così di volo che secondo che i piani orizzontali de' tronchi prismatici, o cilindrici, impiegati nella costruzione, saranno analoghi alle Fig. 1. 6. 10. ec. risulteranno pure i solidi analoghi ai piani espressi nelle Fig. 3. 4. 6. 7. 10. ec.

Per fine voi ben vedete che questo anello circolare (*Fig.* 20.) è eguale ad un cilindro che avesse la base = al piano, o sezione *mn*, e per altezza la periferia media *eg*; quindi tutta quella teoria che corre nei cilindri, quando per il rapporto delle altezze e basi rispettive si confrontano insieme, o si paragonano ad altri solidi, tutta, dissi, ha qui luogo riguardo agli anelli per rapporto alle loro sezioni *mn*, e medie periferie *eg*, pur quando insieme, o con altri solidi, s' intenda di confrontarli. Ma io intorno a questa materia non mi trattengo, perchè già il P. Tacquet l' ha recata anche con profusione nei due Libri 3. e 4. *Cylin. & annular.*

ARTICOLO IV.

Valore d' alcuni Piani, e Solidi formati a cocclea su la superficie di un cilindro retto .

COn la scorta del medesimo principio rilevasi facilmente il valore di un piano, o di un solido che a guisa di cocclea si attortiglia su la superficie

Digitized by Google

di un cilindro. Si concepisce (*Fig.* 22.) il piano come generato dalla fluſſione di una retta *mn*, il ſolido dalla fluſſione di un piano *omn*, tutti due rapiti da due forze che agiſcono per due differenti direzioni, l'una circolare, e l'altra parallela all'aſſe AX.

Sia dunque propoſta in primo luogo la miſura del piano *ambk* ec. di cui *mn* è la larghezza, ed *ab* il paſſo ſempre eguale fra una ſpira e l'altra, il numero delle ſpire = 3, e ſi preſcinda per ora dalla ſua ſolidità.

PROPOSIZIONE.

Dai punti *m*, *n*, X, e dalla metà di *mn* ſi calino le linee morte *mm*, *ee*, *nn*, XR; e per li punti *m*, *e*, *n* col centro in R ſi deſcrivano li circoli, come in Fig. così vien formata la pianta o piano orizzontale della data cocclea. Per brevità il piano inclinato della prima ſpira chiamiſi P.

La larghezza del piano *mn* = *a*.
La periferia orizzontale *eg* = *q*.
Il paſſo *ab* = *b*.

Dico che $P = a \times \sqrt{qq + bb}$.

DIMOSTRAZIONE.

La periferia *ge* orizzontale rappreſenta la periferia della baſe di un cilindro immaginario, ſu la ſuperficie della quale concepiamo che nella cocclea ſi raggiri intorno la ſpirale elevata *ge* ec. media fra le due ſpirali interna *tnu* ec. ed eſterna *amb* ec.

(che

(che formano il bordo del piano inclinato *amn* ec.) e che lo divide tutto il lungo per mezzo, non per metà. Ora quando si spiega e si distende in piano la superficie di un cilindro marcato di una spirale elevata *ge* ec. (1) che ha i passi eguali, ogni spira diventa una retta (*Fig.* 21.) *kb* ipotenusa di un triangolo (2) che ha per base un lato *ka* = alla periferia orizzontale *eg* della base cilindrica (supposta da noi = *q*), e per altezza un' altro lato *ab* = al passo (*Fig.* 22.) *ab* (= *b*), o sia all' altezza acquistata da detta spira, dopo una rivoluzione compita intorno al cilindro. Dunque il piano della prima spira P sarà eguale al prodotto di *a* nell' ipotenusa *kb*. (cioè al prodotto della larghezza nella media lunghezza. Ma (*Fig.* 21.) $kb = \sqrt{qq + bb}$.

Dunque $P = a \times \sqrt{qq + bb}$. Il che ec.

COROLLARIO I.

Quindi moltiplicando il valore di P per il numero delle spire nel caso nostro = 3, il piano di tutta la cocclea risulterà $= a \times 3\sqrt{qq + bb}$.

COROLLARIO II.

Supponendo (*Fig.* 22.) che *mn* con l' estremità *n* giun-

(1) Si vuole che le spire di una Vite non siano veramente, come credettero gli antichi, porzioni di una spirale, ma una curva che dal suo inventore Mr. de Roberval si appella la compagna della Cicloide: *Histoire de l' Academ.* 1724.

(2) Nollet: *Fis. Sper.* T. 3; Lez. 9; Sez. 2. Belidor: *Cours Mat.*

giunga fino all' asse AX della cocclea e per conseguenza fino al centro R del piano orizzontale, ben si vede che niente si altera il già detto, perchè non occorre altro di nuovo, se non che la larghezza *a* diventa più grande, e *q* più picciola.

COROLLARIO III.

Se questo piano inclinato, ferma la medesima media *g e*, e la medesima larghezza *m n*, diventasse verticale, relativamente a quanto (1) altrove abbiamo indicato, egli sarebbe non ostante del medesimo valore; nè occorre altro d' accennare, se non che non essendo più retta; ma curva in questo caso la larghezza $mn = a$, questa avrebbesi a rilevare con la trigonometria; il che, intervenendo abbastanza dati, sarebbe facile.

COROLLARIO IV.

Quando poi si tratti di determinare non già il solo piano, ma anche la solidità, allora si chiamerà *a* la sezione, o piano *e m n* qualunque siasi.

ARTICOLO V.

Valore di un altro solido ravvolto in cocclea intorno ad un anello, o cilindro circolare.

UN altro bizzarro solido (*Fig.* 23. e 24.) possiamo immaginarci, formato di un prisma *g e* ec. la di cui sezione *m n* sia un circolo, o qualunque altro

(1) Art. 1. Prop. 1. Coroll. 2.

tro poligono regolare, e che nel medesimo tempo che si ravvolge a spira, determini e stringa il suo andamento d'intorno ad un anello circolare immaginario *acdb* ec.

La misura di questo solido si riduce facilmente al nostro sistema, perche primieramente un anello solido circolare non essendo altro, come sopra, che un cilindro che abbia per base la sezione dell' anello, che già è un circolo, e per altezza la periferia media *ge* ec. perciò l'anello immaginario *acdb* ec. avrà per base la sezione che è un circolo, di cui *ac* sia il diametro, e per altezza la periferia media *ge* ec.

Riguardo poi al solido ravvolto intorno a detto anello immaginario *acdb* ec. osserviamo, come è evidente, che il passo della spira, non deve essere nè *ab*, nè *cd*, ma la media *ge*: si calcolerà prima per un sol ramo *ge*, avvisando poi di procedere come nella Fig. 22. cioè come se il prisma *ge*, si attortigliasse intorno ad un cilindro retto di base *ac*, e di altezza la media periferia *ge* ec. num. di spire 7.

Importa ora molto di supplire ad un difetto lasciato correre in dette Fig. 23. e 24. appostatamente, ed è che siccome nella Fig. 22. non abbiamo preso in considerazione il cilindro reale, su cui il piano *ambk* si attortiglia, ma un cilindro immaginario, su cui si ravvolge la media *ge*, che divide la larghezza *mn* di detto piano per metà; così parimenti nelle Fig. 23. e 24. l' anello immaginario *acdb* non deve abbracciare, come fa in figura, il prisma attortigliato, ma passare sempre che occorre per la metà della sua sezione *mn*, dove sporge più in fuori, e dove più in dentro.

Qui

Qui poi non mi dispenso per rilevare la solidità proposta di agevolarne la pratica con un esempio. Sia dunque dato il corpo spirale della Fig. 23. per calcolarne la sua solidità. Da quanto abbiamo esposto di sopra a proposito del difetto lasciato correre in figura, seguita primieramente, che la differenza del raggio $Pa - \frac{mn}{2}$ al raggio $Pc + \frac{mn}{2}$ sarà il vero diametro della base del cilindro o anello immaginario *a c b d* ec. il qual supporremo che importi la periferia di Piedi 4, e perciò la base *k a* (*Fig.* 21.) del triangolo *k a b* = P. 4, ed il suo quadrato = P. 16. Secondariamente intendiamo che $Pc +$ la metà di detta differenza, cioè la metà di detto diametro, sia per essere il raggio della periferia *g e*, o sia dell'asse di detto cilindro immaginario, il qual supponiamo che porti la periferia *g e* ec. di P. 21; e poichè il dato prisma si ravvolge in sette spire, P. 3 sarà l'altezza *g e* di una spira, onde nel triangolo della Fig. 21. segneremo l'altezza *a b* = P. 3, ed il suo quadrato = P. 9. Ormai l'ipotenusa *k b* di detto triangolo risulterà $= P. 5 = \sqrt{16+9}$, che è la lunghezza di una spira. Suppongasi per fine che la sezione *m n* del prisma attortigliato sia = P. 2 quadrati. Onde verrà $2 \times 5 = P. 10$ cubici solidità del prisma per una sola spira, e perchè le spire sono sette, l'intiera solidità di tutto il prisma attortigliato monterà a P. cubici num. $70 = 10 \times 7$.

Nella

Digitized by Google

Nella Fig. 24. si procederà nel medesimo modo, dove solamente, le altre cose pari, risulterebbe il passo della spira maggiore che non è stato nella Fig. 23.

ARTICOLO VI.

Solidità dei Coni con l' asse ritorto circolarmente.

ANche la solidità dei coni, l'asse de' quali s'incurva nella periferia di un circolo, come il triangolo della Fig. 12. trasformato nel curvo piano della Fig. 15. si riduce al nostro principio, salvo che nel calcolarlo avrassi a moltiplicare (in vece della normale *a b*) il piano o sezione qualunque, rappresentato per detto *a b*, in $\frac{1}{3}$ della periferia *e g*, in vece di $\frac{1}{2}$. Si riduce, dissi, al nostro principio, perchè la proposizione del secondo Articolo, che è annessa alle Fig. 12. 13. 14. 15. e 16. rispetto ai triangoli, parabole, e iperbole ancora, come ivi abbiamo rimarcato nel Corollario 3. è adattabile anche ai coni. Imperocchè senza impegnarsi in figure solide che poi sono difficili a comprendersi, possiamo idearci, che il cono (poniamo che sia rappresentato dalla Fig. 12.) non sia altro che un ammasso d' infiniti piani: uno triangolare *a b g*, che lo divide per metà dal vertice fino alla base, e tut-

ti gli altri iperbolici, e fra loro ed al piano triangolare paralleli. Una volta dunque che applicata la Fig. 13. ovvero 17. anche all'iperbola, regga tuttavia la medesima proposizione, e che sia vero, come lo è, che la parte d'iperbola che si sopraggiunge e si perde per di dentro, sia eguale alla parte restituita per di fuori; anche nel solido composto dall'aggregato di un triangolo, ed infinite iperbole, cioè nel cono, sarà vero che la parte conica che si compenetra, per dir così, e svanisce per di dentro, sia eguale alla parte aggiunta e restituita per di fuori. E quindi calcolando come sopra, averemo la solidità di un corno da caccia, o di qual altro solido affetto delle condizioni sopraenunziate.

ARTICOLO VII.

Solidità dei Coni con l'asse attortigliato su la superficie di un cilindro retto, e di un anello, o cilindro circolare.

Ammesso ed approvato l'Articolo antecedente, cessa per questo ogni difficoltà, e come una necessaria conseguenza delle narrate cose avviene che se fossero coni, dei quali l'asse fosse ritorto in cocclea, come la Fig. 22. o in altro modo, come le Fig. 23. e 24. sarebbe ancora la loro solidità eguale al prodotto della sezione o base loro in $\frac{1}{3}$ del loro asse attortigliato, asse o media a spirale che

che si rileverebbe nella stessa maniera insegnata di sopra.

Se fosse dato di rilevare la solidità di un anello, o cono cavo vestito di qualunque delle passate forme, non altro più importerebbe che calcolare da se il vuoto per sottraerlo dal corpo intiero, come parte dal suo tutto.

ARTICOLO VIII.

Delle Curve che appariscono nella diversa sezione dei Cilindri, e dei Coni che hanno l' asse ripiegato intorno a un Circolo.

LE sezioni di questi due solidi mostrano, che quantunque siano ripiegati con l' asse intorno a un circolo, non ostante ritengono molto della loro natura. Imperocchè le curve che ne provengono, o sono circoli, o ad ellissi si assomigliano, quando le sezioni siano verticali al *piano di rotazione*.

Figuriamoci che un cilindro ripiegato in cerchio, cioè (*Fig.* 20.) un anello solido ed aperto, di cui la sezione normale alla media periferia *e g* sia il *circolo generatore m n*, venga tagliato da un piano perpendicolare al *piano di rotazione* P *m b* D. Questo taglio o sezione può praticarsi in cinque diversi siti, acciocchè realmente si presenti la medesima curva sotto differenti aspetti.

La prima sezione *c d* è tangente la periferia media *e g* nel punto *a*, e mostra una specie di ellisse, di cui l' asse maggiore è appunto = *c d*, ed il mino-

re = al doppio della maſſima ordinata al circolo generatore *mn*, cioè eguale al diametro di detto circolo. Le altre ordinate ſono pure eguali alle altre ordinate del circolo generatore *mn*, in detto circolo preſe in diſtanza dal ſuo centro *s*, non però proporzionale a quella dei punti preſi da *a* verſo *c*, ovvero *d* ſull' aſſe maggiore *cd* di detta curva, la quale perciò ſi dichiara per una non vera eliſſe.

La ſeconda ſezione *hk*, che attraverſa l' anello parte al di fuori, e parte al di dentro della media periferia *eg*, ci eſibiſce due ſpecie d' eliſſi eguali, perchè la maſſima loro ordinata è eguale alla maſſima ordinata, cioè al raggio del circolo generatore. Ma queſta maſſima ordinata è più vicina ad una eſtremità che all' altra dell' aſſe maggiore di dette eliſſi. Sono poi queſte due ſpecie d' eliſſi interrotte, perchè le loro periferie ſi congiungono dalla parte interiore.

La terza ſezione *po* ſi concepiſce come tangente in *u* la periferia interiore dell' anello più vicina al polo. Queſta non è diverſa dall' antecedente in altro, ſe non che le due ſopraddette eliſſi eguali non ſi interrompono, ma ſolamente ſi toccano nell' ultimo punto *u* dei loro aſſi maggiori dalla parte interiore più acuminata.

La quarta ſezione *qr* moſtra pure due ſpecie d' eliſſi eguali, e ſeparate che ſi ſtanno all' incontro dalla parte più acuminata.

La quinta ſezione finalmente, praticata nella maſſima latitudine dell' anello, ci preſenta due circoli

Digitized by Google

coli ſeparati, eguali ciaſcheduno al circolo generatore *mn*.

Tutte le ſezioni poſſibili al di fuori della prima ſezione *cd* ſono all' occhio ſimili alla ſezione *cd*. Tutte quelle intercette tra *cd*, *po* ſono ſimili alla *bk*, le ſituate tra *po*, *m*D ſi aſſomigliano alla *qr*.

Le ſezioni che ſi potrebbero figurare parallele al piano di rotazione, moſtrerebbero tante corone circolari; e ſe foſſero oblique a detto piano, altre ſtrane curve ne riſulterebbero, ſecondo i diverſi gradi di obliquità, differenti.

Non altrimenti il cono (*Fig.* 15. e 16.) che l'aſſe ſuo piega d' intorno a un circolo, preſenta le ſue ſezioni verticali al piano di rotazione ſotto cinque differenti aſpetti, relativi a quelli dell' anello ſolido ſopraddetto, ſalvo che: Primo, dove le ſezioni dell' anello preſentano coppie d' eliſſi, o circoli eguali, quelle del cono moſtrano coppie d' eliſſi e circoli, quelli della parte della baſe maggiori degli altri verſo al vertice. Secondo. Le curve o ſezioni che occorrono al di fuori dell' aſſe, o media periferia *eg* di detto cono, compariſcono più acuminate dalla parte che eſſo ſi va aſſottigliando ec. Terzo. Le ſezioni parallele all' aſſe, o al piano di rotazione ſarebbero ſpecie d' iperbole col loro aſſe incurvato ſu la periferia di un circolo. Quelle a detto aſſe oblique e parallele al lato ſarebbero ſpecie di parabole ec.

AR-

Digitized by Google

ARTICOLO IX.

Descrizione per punti delle suddette Curve.

PEr mostrare ora come le curve provenienti dalle diverse sezioni suddette si descrivano per punti, figuriamoci (*Fig.* 25. e 26.) che un piano perpendicolare al piano di rotazione venga a fare nell' anello, o nel cono, un taglio per esempio *c d* tangente la media periferia *e g*, e che si voglia descrivere la curva proveniente da una tale sezione.

Dal centro P tirato il raggio P*o*, e dove questo taglia la media periferia, fatto centro, con l'apertura $= \frac{o\,q}{2}$ descrivasi il picciolo semicircolo *o n q*. Indi dal punto *e*, in cui detto raggio P*o*, ovvero il diametro *q o s'* interseca con la sezione *c d*, si ecciti la perpendicolare *e n* a detto diametro, la quale poi si raggiri in modo che diventi *e m* (= *e n*) perpendicolare a detta sezione *c d*. Allora il punto *m* sarà un punto alla curva; *e m* sarà la ordinata; *c d* l' asse maggiore; *e c* l' ascissa verso *c*; *e d* l' altra ascissa. Così procedendo si avranno tutti gli altri punti appartenenti alla curva della proposta sezione. Di questo non v' ha bisogno di prova, basta concepire che alzato il semicircolo, e fatto verticale al piano di rotazione, il punto *n* diventa da se il punto *m*.

Indirizzo poi volentieri tutte queste curve a quelli che se ne dilettano più di me; acciocchè da valorosi

Digitized by Google

rosi calcolatori, si divertano nell' indagare la loro natura, mentre io qui pongo fine a questo primo Trattenimento, cui fornì tutta questa bella ed importante materia l' accoppiamento delle due cartuccie rettangolari che io dissi in principio. Avventuroso accoppiamento, se fosse avvenuto prima che il P. Goldino avesse concepito il suo *centro di gravità*.

TRAT-

Digitized by Google

TRATTENIMENTO II.

Circa al valore di alcuni Piani, e Solidi dipendenti dalla Spiral d' Archimede.

DOpo avere eſpoſti li noſtri penſamenti intorno al valore di Piani, e Solidi generati principalmente dalla figura circolare, ora altri ne reco, che la loro origine riconoſcono dalla ſpirale (1) d' Archimede, laſciando ſtare quelli prodotti da altre ſpirali più elevate, benchè foſſero per riuſcire più eleganti, e più conformi a parecchie produzioni della natura; non ſolo perchè la materia così

(1) Dovendo ſpeſſo occorrere di far uſo di alcune miſure delle ſpirali archimedee, miſure non geometriche, ma di approſſimazione, perchè dipendenti da quella del circolo, perciò qui le raccolgo, quali il Deidier le ha tratte dal VVallis, e da Archimede, e recate in ſua favella in due Opere ſue; cioè *Maiſures des Surfaces* l. 2. Cap. 16; e *Science des Geometres* P. 3. Sec. 5.

Nella miſura delle linee ſpirali prendeſi la ſomma degli archi circolari di cadaun ſettore in vece degli archi ſpirali. Queſta miſura è veramente difettoſa, perchè quantunque gli archi di cadaun ſettore differiſcono dagli archi corriſpondenti della ſpirale, di un ſol punto, non oſtante queſto punto infinite volte preſo, forma una linea di differenza, onde la ſpirale eccede detta ſomma, differenza di primo genere che toglie l' eguaglianza, benchè foſſe minore di $\frac{1}{994}$, come ſi pretende. Tuttociò dunque che ſarà da me avvanzato riſpetto alla lunghezza delle ſpirali ſu queſto principio, abbiaſi per tollerabile in pratica, finchè non abbiamo metodi più preciſi, poichè certamente in un gran bujo anche una picciola fiaccola diventa preziosa.

La miſura poi degli ſpazj ſpirali laſciataci da Archimede è più geometrica, perchè la ſomma dei ſettori circolari preſa in vece dei ſettori ſpirali diffe-

così si consà più ad un semplice trattenimento, ma perchè ancora dalle vestigia che discerno in alcune umane imprese, argomento che a qualche uso si possano applicare.

In fatti non è immaginario il progetto di salire per una spirale ad un' altezza, o scendere ad una

E pro-

---

differisce di un sol punto; differenza di terzo genere, che presa anche infinite volte diventa di secondo genere, ne perciò si distrugge l'eguaglianza.

Misura delle Spirali Archimedee.

I. La prima linea spirale (*Fig.* 35.) che è pure la prima spira *cera*, è = ad una semicirconferenza del primo circolo generatore *ca*. La seconda (principiando sempre dal centro *c*) = a semicirconferenze del secondo circolo generatore *cb*. La terza = 3 semicirconferenze del terzo circolo ec. Prob. 40. Coroll. 1.

II. Quindi la prima linea spirale *cera*, la seconda *cerab* (principiando sempre dal centro *c*), la terza, la quarta ec. sono come i quadrati 1.4.9.16.ec. dei loro raggi *ca.cb*.ec. cioè dei numeri 1.2.3.4.ec. secondo l'ordine naturale aritmeticamente proporzionali. Prob. 40. Coroll. 2.

Poichè gli archi spirali *cer*, *cera* ec. sono come li quadrati dei raggi *cr*, *ca* ec. spiegando e distendendo la spirale in una retta, i raggi non più concorrendo nel centro *c*, diventerebbero paralleli, e la linea che unirebbe le loro estremità sarebbe una parabola, di cui gli archi sarebbero le ascisse, e i raggi le ordinate; essendo proprietà caratteristica della parabola, che le sue ascisse sieno come i quadrati delle ordinate. Prob. 40. Coroll. 10.

III. Levando la prima spirale *cera* dalla seconda *cerab*; la seconda dalla terza; la terza dalla quarta ec. la differenza delle spirali, cioè la prima spira compresa fra il centro *c*, e la circonferenza del primo circolo *ca*; la seconda spira compresa fra la prima circonferenza e la seconda; la terza compresa fra la seconda circonferenza e la terza ec. sono come 1.3.5.7.ec. differenze dei suddetti quadrati 1.4.9.16.ec. Prob. 40. Coroll. 3.

IV. Le spirali incomplete, come per esempio la porzione *cer*, sta alla porzione *cera*, come il quadrato del raggio *cr* al quadrato del raggio *ca*. Prob. 40. Coroll. 5.

V. Le porzioni separate *cer* alla porzione *ran* stanno pure come le differenze dei suddetti quadrati $\overline{cr}^2 . \overline{ca}^2$. Prob. 40. Coroll. 6.

VI. Si chiamano simili quelle spirali che sono di un eguale numero di spire, o sia di rivoluzioni. Perciò la spirale *cera* della Fig. 35. è simile alla spirale E*na*KQ della Fig. 36, perchè sono tutte due di una rivoluzione. Prob. 40. Coroll. 7.

* La

profondità. Avvi in Guinea (1) il Forte Federicbourg posto su la sommità di una collina, a cui si ascende per una strada lavorata a spirale intorno ad essa. Nell'Isola di Minorica (2) fra gli altri monumen-

---

* La differenza che passa tra la somma degli archi dei settori alla spirale, è assai minore di $\frac{1}{994}$ parte della spirale, la quale è di detta somma maggiore. Prob. 40.

Misura degli Spazj spirali.

VII. La somma dei settori aritmeticamente crescenti dal centro alla prima circonferenza, dal centro alla seconda, dal centro alla terza ec. sono come i cubi 1.8.27.64.ec. dei numeri naturali 1.2.3.4. ec. Prob. 41.

VIII. Lo spazio compreso tra la prima spira *cera*, ed il raggio $ca = \frac{1}{3}$ del circolo *ca*. Prob. 41.

IX. Lo spazio incompleto compreso fra la porzione spirale *cer*, e raggio *cr* sta all'intiero spazio suddetto compreso fra la spirale *cera*, e raggio *ca*, come il cubo di *cr* al cubo di *ca*. Prob. 41. Coroll. 2. e 3.

X. Lo spazio compreso fra la spirale di prima rivoluzione *cera* (sempre principiando dal centro) ed il raggio *ca* sta allo spazio compreso tra la spirale *cerasb* di seconda rivoluzione (cominciando pur sempre dal centro) e raggio *cb*; tra la spirale di terza rivoluzione e raggio ec. come le differenze 1.7.19.37.61. ec. dei cubi 1.8.27.64.125. ec. dei numeri naturali 1.2.3.4.5. ec. Prob. 41.

XI. E quindi gli spazj compresi fra il centro e la prima rivoluzione: cioè lo spazio compreso fra la spirale *cera* ed il raggio *ca*; fra la prima rivoluzione e la seconda; fra la seconda e la terza ec. sono come le differenze 1.6.12.18.24. ec. delle suddette differenze 1.7.19.37.61. ec. *Maisures des Surfaces*. Lib. 2. Cap. 16.

XII. Gli spazj incompleti (principiando dal centro *c*) per esempio lo spazio *cere* sta allo spazio *cerasc*, come le differenze dei cubi dei loro raggi $cr^3.cn^3$, cioè come $cr^3.2cn^3 - cq^3$. *Maisures des Surfaces*. Lib. 2. Cap. 16.

XIII. E quindi gli spazj, cioè lo spazio *cerc* sta allo spazio spirale *cerasc* — *cerc*, come le differenze di dette differenze.

---

(1) *Iſter. Gen. de' Viaggi*. T. 13. Questo Forte fu dai Danesi venduto agl'Inglesi, che poi lo chiamarono Forte Reale.

(2) *Armstrong's History of Minorca*. Letter. XVI.

Digitized by Google

menti dell' antichità si scorgono certi Tumuli, o Montagnuole di sassi preparati dall' industria, l' uno appresso all' altro, ad uso forse insieme e di specula e di sepolcro, alla cima de' quali si sale per una strada fatta a spirale. Di una cisterna pure ho udito dire, a cui si cala per un sentiero formato a spirale. La Torre fabbricata da Sostrato Gnidio per ordine di Alessandro Magno nell' Isola di Faros presso Alessandria a comodo de' Naviganti, era piramidale, e per di fuori si saliva alla sommità per una strada a spirale. Ma queste strade o sentieri dovevano essere inclinati all' Orizzonte per una retta. Imperocchè se lo fossero per una curva, riuscirebbero incomode al piede di chi vi salisse sopra, perchè male vi si addatterebbe, ne troverebbe una presa ferma e costante, ed un punto d' appoggio sempre lo stesso. Ora io per divertimento intraprendo di esporre il modo di fabbricare una strada, o piano a spirale onde all' alto si salga, o si discenda ad una profondità, ma inclinato per la ragione addotta all' Orizzonte per una retta. Determineremo indi il valore dei piani orizzontali, del piano inclinato, e della solidità, e della superficie di un tale edifizio. Ma prima credo che sia a proposito di riferire alcune osservazioni che alle spirali archimedee appartengono, ed influiscono molto nelle cose che vengono appresso.

Digitized by Google

ARTICOLO I.

Alcune osservazioni sopra le spirali Archimedee.

PRimo. Osservo per tanto che le spirali, siano per esempio orizzontali, che partono dal medesimo centro, supponendo la *velocità angolare* in esse sempre la stessa, possono essere o della medesima, o di differente *velocità centrifuga*. Nel primo supposto avviene: Primo, che se due o più spirali partono dall'istesso rombo o plaga con la medesima velocità centrifuga, e girano dal medesimo verso, e che l'una e l'altra principino a muoversi nel medesimo tempo, in tal caso sono coincidenti, e così confuse insieme, che non si può l'una dall'altra distinguere. Ma se l'una comincia dopo che l'altra ha già compita una parte del suo cammino, supposta tuttavia anche la *velocità centrifuga* eguale, allora sono pur anche coincidenti, e solamente accade che quella che prima ha principiato il viaggio, trovisi avvanzata sopra quella che è venuta dopo, di un tratto di via proporzionale al tempo della partenza rispettiva; e quindi per essere coincidenti, lo spazio compreso fra una spirale e l'altra viene a riuscire unito, e costituente un solo non interrotto piano, quale è appunto il piano orizzontale della Fig. 29. compreso fra la spirale *c r a n b* (corrispondente a quella spirale elevata, che forma il contorno interno del piano inclinato di detta figura), e la spirale *c r a n b e t* (corrispondente a quella che forma il contor-

Digitized by Google

torno esterno di detto piano); la prima delle quali ha principiato a muoversi dopo che la seconda aveva già compita una rivoluzione. Il che è evidente, perchè la seconda, che dal centro *c* è arrivata fino in *t*, supera di una rivoluzione la prima, che da detto centro è solamente pervenuta fino in *b*.

Secondo. Se due o più spirali con le medesime *velocità angolare*, e *centrifuga*, e dal medesimo verso principiano a muoversi, ma da differente rombo, esse si conservano bensì parallele, ma non coincidenti, anzi per tutto il corso camminano l' una distinta e separata dall' altra, e perciò lo spazio da esse compreso riesce tale, che non forma un piano continuo ed unito. Quindi intendiamo che appunto da differente rombo sieno partite (*Fig.* 28.) le due spirali orizzontali, liscia una *cranbet*, e l' altra punteggiata *czmfgdqu*, corrispondenti alle due spirali elevate, che formano li due contorni, interno, ed esterno, del piano inclinato H A D P ec. le quali terminano un piano orizzontale ombreggiato che nel mezzo resta interrotto da uno spazio vuoto, che seguita l' istesso andamento.

Queste spirali di differente rombo tagliano il raggio generatore *ca* in parti proporzionali agli spazj angolari da detti rombi compresi. Così la spirale *czomf* ec. che taglia via $\frac{1}{3}$ parte *co* del suddetto raggio generatore *ca*, comincia da un rombo discosto $\frac{1}{3}$ parte di circolo dal rombo, d' onde ha prin-

principiato l'altra ſpirale *crab* ec. E per queſto è, che ſe la ſpirale d' Archimede foſſe deſcrivibile geometricamente, non ſolo ſarebbe data la quadratura del circolo, ma ancora la triſezione dell' angolo.

Or ſiamo a portata di rimarcare ancora coſa ſia ciò che in progreſſo ſoglio chiamare *voluta lineare* o *piana*: Imperocchè una ſpirale s' impiega nella voluta che io dico, finchè non v' è una ſpirale cui poſſa andar parallela. Ma queſta ſpirale, per eſempio Fig. 29. non v' è, ſe non quando, giunto un raggio generatore dopo un giro dalla poſitura iniziale *ca* a coincidere con *ca*, la ſpirale del ſecondo giro ritrova ſe ſteſſa nel primo, cui poi cammina del pari, perchè gl' incrementi del primo giro confrontano, e ſono ſimili ed eguali a quelli del ſecondo. In tal caſo la porzion di ſpirale *cra* è ciò che io chiamo *voluta lineare*; e lo ſpazio *crac*, compreſo da detta *voluta lineare* e raggio generatore *ca*, è quello; che da me *voluta piana* appellaſi. Non altrimenti nella Fig. 28. la ſpirale punteggiata *czomf* ec. non trova ſe ſteſſa per andarvi del pari, ſe non dopo che il raggio generatore dalla poſitura iniziale *cq* non è giunto a coincidere con *cq*; ma per trovarne un' altra *cra* ec. di cui la poſitura iniziale del raggio generatore *ca* trovaſi diſtante dalla poſitura iniziale del proprio raggio generatore *cq* un rombo = per il ſuppoſto a gradi 120, biſogna che prima giunga a coincidere con detto raggio iniziale *ca*. Allora trova il primo punto *c* della ſpirale liſcia *cra* ec. cui dal ſuo punto *o* comincia ad andar parallela, e la *voluta lineare* riſulta in queſto caſo la picciola

por-

porzion di ſpirale *c z o*, e la *voluta piana* quello ſpazziolino che è terminato da *c o* porzion del raggio *c a*, e dalla *voluta lineare*, o picciol arco *c z o* di detta ſpirale punteggiata.

Terzo. Nel ſuppoſto poi che due ſpirali partano dal medeſimo rombo con differente *velocità centrifuga*, ferma reſtando la medeſima *velocità angolare*, eſſe allora ſi vanno per via ad incontrare, e tanto più toſto ſi raggiungono, quanto la differenza della velocità è maggiore; ma quanto più preſto ſi raggiungono, preſentano delle figure confuſe, e poco atte ad eccitare con la loro ſimmetria la curioſità. Tali ſarebbero le figure generate da coppie di ſpirali veloci in ragione di $\frac{1}{4} . \frac{2}{5} . \frac{4}{7}$ .ec. Per contrario quando detta differenza delle velocità ſia la ſola unità, come ſe foſſero in ragione di $\frac{1}{2} . \frac{2}{3} . \frac{3}{4}$ .ec. le figure che ne riſultano, per la loro diſpoſizione c' invitano ad oſſervarle. Di queſte ne preſento un eſempio nella Fig. 33. formata da due ſpirali, l' una *cent*PSQ, con velocità $= \frac{1}{4}$; l' altra *crma*HBRDQ, con velocità $= \frac{3}{4}$, differenza $= 1$, che partono dal medeſimo centro *c*, e ſi raggiungono in Q, dopo che l'una ha compite 3 rivoluzioni, e l' altra 4.

Eſporremo ben toſto il valore dei piani, che relativamente alle tre prefate oſſervazioni, riſultano da due ſpirali coincidenti, da due ſpirali parallele, e da

da due ſpirali convergenti ; ma prima credo opportuno di recare l' origine dei ſolidi che abbiamo in queſtione, e che a detti piani ſi riferiſcono .

ARTICOLO II.

Origine di queſti ſolidi , e della ſtrada a ſpirale , o piano inclinato che ſoſtengono .

PEr dare dunque ad intendere l' origine e la natura di queſti piani e ſolidi con una maniera, ſecondo il noſtro ſolito , ſempliciſſima , immaginiamoci che un triangolo di cartone ABC (*Fig.* 27.) ſia poſto verticale all' orizzonte , e piegato in modo che la ſua baſe AC ſia applicata e condotta dietro al giro della ſpirale liſcia (*Fig.* 28) *cranbet* , a cui ſi ſuppone eguale, cominciando, col punto C del triangolo , dal centro *c* della ſpirale. Noi vediamo toſto comparire un ſolido , quale la figura rappreſenta nella ſua alzata, ravvolto intorno a un aſſe VQ. Il punto A del triangolo corriſponde al punto A di detto ſolido; l' altezza BC di quello al predetto aſſe VQ di queſto ; l' ipotenuſa AB diventa la ſtrada o piano elevato HADPKFV inclinato all' orizzonte, come volevaſi, per una retta; onde comodamente ſi ſalga ad un' altezza , ed è tanto larga quanto il cartone è groſſo. Che ſe per contrario ſi principiaſſe dal centro *c* della ſpirale ad addattarvi il triangolo dall' altro capo A , ſicchè l' altra eſtremità C del triangolo andaſſe a cadere nell' ultimo punto *r* della ſpirale , allora il ſolido riuſcirebbe a

pro-

Digitized by Google

propoſito per diſcendere ad una profondità. Ma ſuppoſto per ora il primo caſo, perchè non vogliamo che detta Fig. 28. ci moſtri piuttoſto un' effettiva fabbrica di pietre, e calce ordinata a formare il piano inclinato, o ſtrada a ſpirale ſopraddetta? Giova figurarcela appunto tale, e riandare anche tre differenti coſtruzioni, delle quali è ſuſcettibile un tal lavoro.

Primo. Può accadere in primo luogo che la groſſezza del cartone (*Fig.* 28.) ſia minore del raggio generatore *ca* della ſpirale, onde tanto nel diſegno orizzontale, quanto nell' altro elevato (che per riſparmio di figure ho fatto che partecipi del geometrico, e del ſcenografico, ma non è nè l' un, nè l' altro) reſta uno ſpazio vuoto fra l' una e l' altra ſpira, perchè il contorno eſteriore del piano elevato HADP ec. cade più in dentro del contorno interiore della ſeguente ſpira, come abbaſtanza viene indicato dalle perpendicolari che uniſcono detti due diſegni. Ciò che avviene in conformità della ſeconda oſſervazione enunziata nell' antecedente Articolo.

Secondo. Se la groſſezza del cartone (*Fig.* 29.) è eguale a detto raggio generatore *ca*, tanto il piano orizzontale, quanto il ſolido rieſce pieno e continuo, e da neſſun vuoto in mezzo interrotto; e le perpendicolari moſtrano che il contorno eſteriore di detto piano elevato preciſamente cade ſul contorno interiore della ſeguente ſpira. Ciò che riviene alla prima oſſervazione del ſuddetto Articolo antecedente.

Digitized by Google

Terzo. Finalmente ci poſſiamo immaginare che la groſſezza del cartone ſia maggiore del raggio generatore *c a* (*Fig.* 30.) dove la groſſezza del cartone *c f* è maggiore di detto raggio *c a*. Caſo che ridotto a quella poſſibilità che ammetterebbe la pratica, riviene a queſto: cioè che il contorno eſteriore del piano elevato ſporga più in fuori del contorno interiore della ſeguente ſpira, come le perpendicolari moſtrano, dove nel piano orizzontale con ombra più grave ſi diſtingue quella parte che ſi ſopraggiunge, e ſi raddoppia, come corriſpondente a quella porzione di piano elevato, che perpendicolarmente ſovraſtà all' inferiore.

Quarto. Un altro ſolido io concepiſco dipendente dall' antecedente, mentre facendo aſtrazione dal corpo (*Fig.* 30.) che ſoſtiene il piano elevato, come ſe non vi foſſe, e come ſe (fermo reſtando il confine eſteriore di detto piano) ſolamente c' immaginaſſimo che, dilatandoſi detto piano dalla parte verſo all' aſſe V Q, s' inoltraſſe fino all' aſſe medeſimo. Allora noi averemmo un piano piegato leggiadramente in forma di cocclea intorno a ſe ſteſſo, quale viene a ſufficienza, benchè rozzamente, rappreſentato della Fig. 31. nella quale ſi rimarchi, che non già una ſola porzion di piano, come nella Fig. 30. ſovraſtà al piano che continua nella ſeguente ſpira, ma tutto il piano della prima rivoluzione V F K ſovraſtà a quello della ſeconda rivoluzione P D; quello della ſeconda rivoluzione P D tutto ſovraſtà ſopra quello della terza A H ec. come dalle perpendicolari condotte dall' uno all' altro

pia-

piano si manifesta, ed è in somma un piano che si attortiglia intorno ad una linea che è l' asse VQ; piano per altro che, secondo me, per arte umana non è facile; perchè non si può attualmente una linea dividere in infinite parti, e ad ogni infinitesima addattarle il suo settore di piano corrispondente. Solo Iddio stupendo in tutte le cose uscite dalle sue mani ha potuto produrre simili lavori, come io mi ricordo di avere osservato in alcuni vegetabili, e particolarmente nell' erba medica di tutte quasi le specie.

ARTICOLO III.

Valore del piano orizzontale dei quattro solidi rappresentati nelle Fig. 28. 29. 30. 31.

NOn si può a meno di non definire prima il valore dei piani orizzontali dei quattro solidi indicati di sopra, perchè da questo si perviene poi a stabilire il loro piano inclinato, e la loro solidità.

Il piano orizzontale per esempio della Fig. 28. è una zona ombreggiata chiusa fra due spirali corrispondenti alla grossezza del cartone, o muraglia VFKP ec. se vi piace, che forma il solido di detta figura. Per rilevare il valore di questa zona, da nessuno, che io sappia, finora geometricamente determinato, sottraeremo dallo spazio compreso dalla maggior spirale punteggiata *czomfgdqu*, e raggio *cu*, tutta la zona vuota; ma perchè ciò non si può fare in un tratto, lo faremo a parte a par-

te. Onde riportandoſi, come a termine fiſſo di comparazione, al circolo generatore *ca* (doveva dire al circolo generatore deſcritto col raggio *ca*, ma per brevità ſoglio dire, e in appreſſo dirò ſempre così) della ſpirale liſcia *cra* di prima rivoluzione, determineremo prima il valore della porzion di zona *czomraf* chiuſa fra il centro *c*, e retta *af*; poi della ſeguente porzione *afngbd* chiuſa fra le due rette *af*, *bd*; e per fine l'ultima porzione *bdeqtu*, che finiſce fra le rette *bd*, *tu*; perchè raccogliendo poi detti tre valori in una ſomma, queſta fia l'intiero importare di detta zona ombreggiata.

Quantunque foſſe più a propoſito di concepire la propoſizione e dimoſtrazione ſeguente in termini generali, non oſtante per maggior facilità a me piace di contenermi nel caſo particolare della figura, da cui come da una formola generale ſon perſuaſo che ſi comprenderà del pari come regolarci in circoſtanze differenti, applicando numeri diverſi ad altri dati, in vece di aſſegnare alle lettere della formola altri valori, che è poi a dir vero lo ſteſſo.

Suppongaſi dunque che la larghezza *co*, ovvero *af*, ovvero *bd*, ovvero *tu* di detta zona ſia $=1$; e la larghezza del vuoto *oa*, ovvero *fb*, ovvero *ds* ſia $=2$; quindi ſarà $co=1$; $ca=3$; $cf=4$; $cb=6$; $cd=7$; $ct=9$; $cu=10$.

In oltre ſi rimarchi che la ſpirale liſcia è lo ſteſſo che la ſpirale punteggiata, ſalvo che il raggio generatore dell'una ha cominciato a muoverſi da un rombo diſtante da quello dell'altra un angolo di gr. 120. Il che ſi inferiſce (per ciò che abbiamo

oſſer-

Digitized by Google

osservato nel primo Articolo) dalla distanza *co*, ovvero *af*, ovvero ec. da una spirale all' altra, costantemente eguale, per il supposto, ad $\frac{1}{3}$ del raggio generatore *ca*, ovvero *ab* ec. Quando dunque voglio confrontare lo spazio spirale compreso dalla spirale liscia *cra* di prima rivoluzione con lo spazio compreso dalla spirale punteggiata *czomf* di rivoluzione incompleta, è lo stesso che se si confrontasse detto spazio spirale compreso dalla spirale liscia *cra* fino in *a*, allo spazio compreso dalla medesima spirale liscia pervenuta $\frac{1}{3}$ di rivoluzione oltre *a* fino in *n*; perchè la spirale *czomf*, e la spirale *cran* sono delle medesime velocità *angolare*, e *centrifuga*; cosicchè se partissero dal medesimo rombo, sarebbero eguali e coincidenti; e però nel calcolare gli spazj spirali adopereremo lo spazio chiuso della spiral liscia *cran* in vece dello spazio compreso dalla spirale punteggiata *czomf*; e così per la medesima ragione prenderemo lo spazio compreso dalla spirale liscia *cranbe*, in vece di quello della spirale punteggiata *czomfgd*; e per fine lo spazio terminato dalla spirale liscia *cranbetu*, in vece dello spazio che la spirale punteggiata *czomfgdqu* racchiude fino in *u*. Ciò premesso.

PRO-

PROPOSIZIONE I.

La zona o spazio compreso fra due spirali che partono da due rombi distanti gr. 120, l' una completa di tre rivoluzioni *cranbet*, e l' altra incompleta *czomfgdqu* è eguale a tre circoli descritti col raggio *ca*, più $\frac{1}{3}$ di detto circolo, dico spazio *czomf* ec. $= 3\frac{1}{3}$ circ. *ca*.

DIMOSTRAZIONE.

Primo. Osservisi in primo luogo che mentre il raggio di prima rivoluzione *ca* continua per $\frac{1}{3}$ della seconda rivoluzione fino in *n* (mi dispiace che l' angustia della figura non permetta di affiggervi un' altra lettera) recide al centro uno spaziolino chiuso fra parte della spirale *cra*, ed $\frac{1}{4}$ di detto raggio *cn*; e però lo spazio di prima rivoluzione completa *cra* sarà (1) allo spazio incompleto *cran*, come il cubo di *ca* al cubo di *cn* — il cubo di $\frac{1}{4}$ di det-

(1) Nota alla pag. 32. n. 12.

Digitized by Google

detto raggio cn. Ora $ca = 3$; $cn (= cf) = 4$; la $\frac{1}{4}$ parte di detto raggio $cn = 1$. Dunque lo ſpazio cra ſarà allo ſpazio $cran$, come $27 (= \overset{-3}{ca})$, a $64 (= \overset{-3}{cn}) - 1 = 63$. Ma lo ſpazio $cra (1) = \frac{1}{3}$ circ. ca. Dunque, poichè $27 . \frac{1}{3} :: 63 . \frac{63}{81}$, ſarà lo ſpazio $cran$ (cioè lo ſpazio $czomf$ della ſpirale punteggiata, cui è eguale) $= \frac{63}{81}$ del circ. ca; da cui ſottratto lo ſpazio $cra = \frac{1}{3}$ circ. $ca = \frac{27}{81}$, reſta la differenza di detti ſpazj, cioè la zona o ſpazio ſpirale chiuſo fra il centro, e la retta $af = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$ circ. ca.

Secondo. Lo ſpazio chiuſo fra la ſpirale liſcia $cranb$ di ſeconda rivoluzione ſta allo ſpazio $cranbe$ di rivoluzione incompleta (2), come $\overset{-3}{cb} - \overset{-3}{ca}$, a $\overset{-3}{ce} - \overset{-3}{cn}$. Ovvero come (giacchè $cb = 6$; $ca = 3$; $ce = 7$; $cn = 4$) 189 a 279. Ora perchè lo ſpazio di prima rivoluzione cra ſta allo ſpazio di ſeconda rivoluzione $cranb$ (3), come 1 a 7, ed è

(1) Nota alla pag. 32. n. 8.
(2) Nota ſuddetta, n. 12.
(3) Nota ſuddetta, n. 10.

Digitized by Google

ed è lo spazio $cra = \frac{1}{3}$ circ. ca, risulta lo spazio di seconda rivoluzione (giacchè $1 . \frac{1}{3} :: 7 . \frac{7}{3}$) $= \frac{7}{3}$, ovvero $2\frac{1}{3}$ circolo ca; e quindi per quest' altra proporzione $189 . 2\frac{1}{3} :: 279 . 3\frac{4}{9}$, viene lo spazio $cranbe = 3\frac{4}{9}$ circolo ca. Sottratto dunque lo spazio $cranb = 2\frac{1}{3}$ circ. ca dallo spazio $cranbe (= czomfgd) = 3\frac{4}{9}$, resta la differenza di detti spazj, cioè la zona o spazio spirale ristretto fra le rette af, $bd = 1\frac{1}{9}$ circ. ca.

Terzo. Lo spazio chiuso fra la spirale liscia di terza rivoluzione $cranbet$ sta allo spazio di rivoluzione incompleta $cranbetx$, come (1) $\overset{3}{ct} - \overset{3}{cb}$, a $\overset{3}{cx} - \overset{3}{ce}$. Ovvero come (perchè $ct = 9$; $cb = 6$; $cx = 10$; $ce = 7$) 513 a 657. Ora poichè lo spazio di seconda rivoluzione $cranb$ sta allo spazio di terza rivoluzione $cranbet$, (2) come 7. 19; ed è lo spazio $cranb$ trovato di sopra $= \frac{7}{3}$ circ. ca; risulta lo spazio di terza rivoluzione

(1) Nota alla pag. 32. n. 12.
(2) Nota suddetta, n. 10.

Digitized by Google

zione *cranbet* (giacchè $7.\frac{7}{3}::19.\frac{133}{21}$) $=\frac{133}{21}$, ovvero $=6\frac{1}{3}$ circ. *ca*; e perciò per queſt' altra proporzione $513.6\frac{1}{3}::657.8\frac{1}{9}$, viene lo ſpazio *cranbetx* $=8\frac{1}{9}$ circolo *ca*. Sottratto per fine detto ſpazio *cranbet* $(=6\frac{1}{3})$ dallo ſpazio *cranbetx* $(=czomfgdqu)=8\frac{1}{9}$, reſta la differenza di detti ſpazj, cioè l' ultima porzion di zona o ſpazio riſtretto fra le rette *bd*, *tu*, $=1\frac{7}{9}$ circ. *ca*.

Raccolte ora in una ſomma tutte le tre quantità ritrovate, riſulta il valore di tutta la zona o ſpazio ſpirale ombreggiato compreſo ec. $=\frac{4}{9}+1\frac{1}{9}+1\frac{7}{9}=3\frac{1}{3}$ circ. *ca*. Il che era ec.

COROLLARIO I.

Eſſendo tutto lo ſpazio compreſo dalla ſpirale punteggiata fino in $u=8\frac{1}{9}$ circ. *ca*, come ſopra; e tutta la zona o ſpazio ombreggiato $=3\frac{1}{3}$ circ. *ca*;

Digitized by Google

perciò tutto lo ſpazio vuoto terminato fra le due ſpirali dalla porzione *dt* del raggio generatore *cu* verrà $= 8\frac{1}{9} - 3\frac{1}{3} = 4\frac{7}{9}$ circ. *ca*.

COROLLARIO II.

Giacchè lo ſpazio ſpirale, terminato dalla ſpirale liſcia *cran*, e raggio *cn*, è =, come ſopra, allo ſpazio compreſo dalla ſpirale punteggiata *czomf*, e raggio *cf*; ſarà anche la differenza dello ſpazio *cra* allo ſpazio *cran* = alla differenza del medeſimo ſpazio *cra* allo ſpazio *czomf*; ſarà, diſſi, lo ſpazio, o ſettore ſpirale chiuſo fra l' arco *an*, e i raggi *ca*, *cn*, = alla prima porzione di zona che dal centro *c* termina ad *af*. Per la medeſima ragione lo ſpazio, chiuſo fra gli archi *an*, *be*, e i raggi *ne*, *ab*, ſarà = alla ſeconda porzion di zona, che da *af* termina a *bd*. E così pure lo ſpazio fra gli archi *be*, *tx*, e i raggi *ex*, *bt*, = all' ultima porzion di zona, che da *bd* termina a *tu*. Quindi per fine la ſomma degli 3 ſpazj ſuddetti = alla ſomma delle ſuddette 3 porzioni di zona; cioè il ſettore completo terminato dall' arco *tx*, e i raggi *cx*, *ct*, = a tutta la zona che da *c* termina a *tu*; e non altrimenti il maggior ſettore terminato dall' arco *et*, e dai raggi *ce*, *ct*, = a tutto lo ſpazio vuoto che reſta dalla zona compreſo, e dal raggio *dt*.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSIZIONE II.

Lo ſpazio compreſo fra una ſpirale di 3 rivoluzioni *cranbes* (*Fig.* 29.) e raggio generat. *cs*, è $= 6\frac{1}{3}$ circ. *ca*.

DIMOSTRAZIONE.

Lo ſpazio *cra* di prima rivoluzione (*Fig.* 29.) ſta a quello di terza rivoluzione *cranbes*, come (1) 1 . 19 . Ma detto ſpazio (2) di prima rivoluzione $cra = \frac{1}{3}$ circ. *ca*. Dunque per queſta proporzione $1 . \frac{1}{3} :: 19 . \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$, riſulta tutto lo ſpazio orizzontale ombreggiato compreſo ec. $= 6\frac{1}{3}$ circ. *ca*.

Il che era ec.

PROPOSIZIONE III.

Lo ſpazio compreſo (*Fig.* 30.) fra una ſpirale di 3 rivoluzioni + la zona proveniente d' altra ſpirale diſtante un rombo di gr. 120 fino all' incontro del raggio generat. *cu* in *su*, è $= 9\frac{2}{3}$ circ. *ca*.

(1) Nota alla pag. 32. n. 10.
(2) Nota ſuddetta, n. 8.

Digitized by Google

DIMOSTRAZIONE.

Circa queſto piano eſpreſſo in detta Fig. 30. dove con ombra più denſa vien ſegnata quella parte del piano elevato, che ſovraſtà a quello della ſeguente ſpira, deveſi calcolare a parte la zona ſegnata d'ombra denſa, ed aggiungerla a tutto lo ſpazio chiuſo nella minor ſpirale punteggiata *cranbet*. La zona marcata d' ombra denſa di queſta figura, nella quale ſi ſuppongono intervenire li medeſimi circoli generatori della Fig. 28. e le ſpirali partite dagl' iſteſſi rombi diſtanti gr. 120, riſulta altresì del medeſimo valore ivi ritrovato $= 3\frac{1}{3}$ circolo *ca*. Parimenti lo ſpazio chiuſo nella minor ſpirale punteggiata di queſta Fig. 30. è eguale a quello chiuſo nella minor ſpirale liſcia *cranbet* di detta Fig. 28. e della Fig. 29. ivi trovato $= 6\frac{1}{3}$ circ. *ca*. Onde il piano della Fig. 30. cioè lo ſpazio compreſo fra una ſpirale ec. riſulta eguale all' aggregato di detti due valori, dico $= 3\frac{1}{3} + 6\frac{1}{3} = 9\frac{2}{3}$ circolo *ca*. Il che era ec.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSIZIONE IV.

Lo ſpazio ſpirale (*Fig.* 31.) di prima rivoluzione ca + quello di ſeconda rivoluzione cb + quello di terza rivoluzione $ct = 9$ circ. ca.

DIMOSTRAZIONE.

Supponendo che il ſolido della Fig. 31. ſia di 3 rivoluzioni, il piano orizzontale deveſi concepire come un ammaſſo degli ſpazj ſpirali di cadauna rivoluzione; onde raccogliendo in una ſomma lo ſpazio della prima rivoluzione, quello della ſeconda fino al centro, quello della terza fino al centro, queſta ſomma ſarà il valore di tutti tre gli piani orizzontali che in detta figura ſi ritrovano, l'uno ſopra l'altro ammaſſati. Ora lo ſpazio di prima rivoluzione, quello della ſeconda, quello della terza ſono (1) come 1.7.19, ed eſſendo lo ſpazio di prima rivoluzione (2) $= \frac{1}{3}$ circ. ca. Quindi il valore di ciaſcheduno ſpazio riſulta $\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{19}{3}$, e l'aggregato di tutti tre $= \frac{1}{3} + \frac{7}{3} + \frac{19}{3} = \frac{27}{3} = 9$ circ. ca.

Il che era ec.

Nella Fig. 33. mi occorre di ravviſare tre piani o ſpazj eſaurienti l'area del circolo maſſimo CKQ,

(1) Nota alla pag. 32. n. 10.
(2) Nota ſuddetta, n. 8.

Digitized by Google

CKQ, generati da due ſpirali ; l' una punteggiata $Cent$PSQ, con velocità $= 4$; e l' altra liſcia $Crma$HBRDQ, con velocità $= 3$, accennate già nella terza oſſervazione del primo Articolo. Il primo tratteggiato vien da me chiamato *triangolo ſpirale* ; l' altro laſciato bianco detto *voluta ſpirale* ; l' ultimo diſtinto a puntini chiamato *complemento* a detto circolo maſſimo. Mi piace ora di dimoſtrare nella ſeguente Propoſizione il valore di queſti piani.

PROPOSIZIONE V.

Li tre ſpazj compreſi fra due ſpirali veloci in ragion di 3 a 4 ſono come ſegue, cioè :

Il *triangolo* $= \frac{21}{48}$ circ. CQ.

La *voluta* $= \frac{16}{48}$ circ. ſuddetto.

Il *complemento* $= \frac{11}{48}$ circ. ſuddetto.

Non mi pare pertanto di dovere entrare nella dimoſtrazione ſenza prima fare, come ho fatto anche nella prima di queſto Articolo, un cenno del metodo che oſſervo, perchè giungendo ogni paſſo all' improvviſo, e non ſapendo dove la coſa vada a finire, dubiterei che la non pareſſe poi così facile, com' ella è. Prima dunque comincio dal centro C a rilevare una porzion di *triangolo* ; poi una porzion di *voluta* ; ripiglio di nuovo il *triangolo*, e ne determino un' altra porzione ; indi paſſo a ſcoprire un' altra

altra porzion di *voluta*; torno al *triangolo*, e misuro l' ultima porzion di esso; e per fine termino con l' ultima porzion della *voluta*, sempre adoperando le quantità, che di mano in mano si scoprono, per rilevare le incognite che restano. Secondariamente prendo in una somma le tre porzioni del *triangolo* ormai ritrovate, e ne fo un intiero, faccio lo stesso delle tre porzioni della *voluta*; e finalmente metto insieme il valore dell' intiero *triangolo*, e dell' intiera *voluta* in una somma, la quale sottratta dall' intiero circolo massimo KQ, resta l' importare del *complemento*.

Essendo il raggio CQ del massimo circolo diviso dalla spirale liscia di 4 rivoluzioni in 4 parti, e dalla spirale punteggiata di 3 rivoluzioni in parti 3; possiamo considerar detto raggio diviso in parti 12 prodotto di 4 in 3, e notare che $Cm = 3$; $Cn = 4$; e però $mn = 1$. Entriamo in via.

DIMOSTRAZIONE.

Primo. Lo spazio $CrmC$ (1) $= \frac{1}{3}$ circolo Cm;

ma circ. Cm. circ. CQ :: 1. 16 quadrati dei raggi loro $Cm = 3$; $CQ = 12$, ovvero $Cm = 1$; $CQ = 4$.

Dunque, perchè $1 . \frac{1}{3} :: 16 . \frac{1}{48}$, sarà $\frac{1}{3}$ circ. Cm, ovvero lo spazio $CrmC = \frac{1}{48}$ circ. CQ.

Lo

(1) Nota alla pag. 32, n. 8.

Lo ſpazio $CenC = \frac{1}{3}$ circolo Cn. Ora circolo Cn. circolo CQ :: 1 . 9 quadrati dei raggi $Cn = 4$; $CQ = 12$, ovvero $Cn = 1$; $CQ = 3$; e perciò da queſta proporzione $1 . \frac{1}{3} :: 9 . \frac{1}{27}$ ricavaſi che $\frac{1}{3}$ circolo Cn, ovvero lo ſpazio $CenC$ ſia $= \frac{1}{27}$ circolo CQ.

Sottratto ora lo ſpazio $CrmC = \frac{1}{48}$ circ. CQ dallo ſpazio $CenC = \frac{1}{27}$ circ. CQ, reſta la porzion di *triangolo ſpirale*, che dal centro C arriva ſino alla retta $mn* = \frac{7}{432}$ circ. CQ.

Secondo. Abbiamo trovato di ſopra lo ſpazio $CrmC = \frac{1}{48}$ circolo CQ. Ora lo ſpazio di prima rivoluzione $CrmC$ ſta allo ſpazio di ſeconda rivoluzione $CrmaHm$ (1), come 1 . 7; e perchè $1 . \frac{1}{48} :: 7 . \frac{7}{48}$, ſarà detto ſpazio $CrmaHm = \frac{7}{48}$ circ. CQ.

Sot-

(1) Nota alla pag. 32. n. 10.

Digitized by Google

Sottratto però il *triangolo* trovato di ſopra $= \frac{7}{432}$ dal predetto ſpazio $CrmaHm = \frac{7}{48}$ circolo CQ, rimane la porzion di *voluta* che dal centro C continua fino all' incontro della retta $nH* = \frac{7}{54}$ circolo CQ.

Terzo. Lo ſpazio $Cen C$ fu (paragr. 1.) trovato $= \frac{1}{27}$ circ. CQ; e perchè lo ſpazio di prima rivoluzione ſta allo ſpazio di ſeconda rivoluzione $Cent Pn$ (1) come 1.7; quindi eſſendo $1.\frac{1}{27}::7.\frac{7}{27}$; verrà detto ſpazio $Cent Pn = \frac{7}{27}$ circ. CQ.

Raccolte pertanto inſieme la porzion di *triangolo* trovata di ſopra (paragr. 1.) $= \frac{7}{432}$ circ. CQ, e la porzion di *voluta* trovata al par. 2. $= \frac{7}{54}$ circ. CQ, ne averemo la ſomma $= \frac{7}{48}$, la qual ſottratta dal ſopraddetto ſpazio $Cent Pn = \frac{7}{27}$, reſta la ſeguen-

(1) Nota alla pag. 32. n. 20.

Digitized by Google

te porzion di *triangolo* chiusa fra le due rette *nm*, PH * $= \frac{49}{432}$ circ. CQ.

Quarto. Lo spazio di prima rivoluzione C*rm*C (parag. 1.) $= \frac{1}{48}$ circ. CQ sta a quello di terza rivoluzione terminato dalla spirale C*rma*HBR, e retta RH (1), come 1 . 19; quindi perchè $1 . \frac{1}{48} :: 19 . \frac{19}{48}$, viene detto spazio di terza rivoluzione $= \frac{19}{48}$ circ. CQ.

Raccolgo ora in una somma le tre quantità note trovate di sopra, cioè la porzion di *triangolo* (parag. 1.) $= \frac{7}{432}$; l' altra porzion di *triangolo* (paragr. 3.) $= \frac{49}{432}$; e la porzion di *voluta* trovata (paragr. 2.) $= \frac{7}{54}$; onde ne viene $\frac{7}{432} + \frac{49}{432} + \frac{7}{54} = \frac{14}{54}$, che sottratta dal suddetto spazio C*rma*HBRH $= \frac{19}{48}$, resta il valore della seguente porzion di voluta chiusa fra due rette *n*H, PR * $= \frac{177}{1296}$ circolo CQ.

Quin-

(1) Nota alla pag. 32. n. 10.

Digitized by Google

Quinto . Lo ſpazio di prima rivoluzione *Cen* (parag. 1.) $= \frac{1}{27}$ circolo CQ ſta a quello di terza rivoluzione terminato dalla ſpirale *Cent*PSQ, e retta PQ (1), come 1. 19; e perciò eſſendo $1 . \frac{1}{27} :: 19 . \frac{19}{27}$, riſulta detto ſpazio *Cent*PSQ $= \frac{19}{27}$ circolo CQ.

Aduniamo ora le quattro quantità rilevate finora; tre compreſe nella ſomma $= \frac{14}{54}$, e l' altra ſeparata $= \frac{177}{1296}$, tutte due ſegnate nel ſuddetto paragr. 4. l' aggregato che ne riſulta $= \frac{19}{48}$, detratto dal ſuddetto ſpazio $= \frac{19}{27}$, reſta l' importare della terza ultima porzione di *triangolo ſpirale* chiuſa fra le due rette PH, QR* $= \frac{133}{432}$ circolo CQ.

Seſto . Lo ſpazio di prima rivoluzione *Crm*C (parag. 1.) $= \frac{1}{48}$ circ. CQ ſta a quello della

(1) Nota alla pag. 32. n. 10.

Digitized by Google

quarta rivoluzione C*rma*HBRDQ (1), come 1.37; e però essendo $1.\frac{1}{48} :: 37.\frac{37}{48}$, riesce questo spazio di quarta rivoluzione $= \frac{37}{48}$ circolo CQ.

Tutte le quantità dedotte finora, quattro comprese nella somma $= \frac{19}{48}$, e la quinta separata $= \frac{133}{432}$, accennate tutte due nell'antecedente paragrafo 5. si raccolgano in una somma, che sarà $= \frac{19}{27}$, e questa si sottragga dallo spazio suddetto $= \frac{37}{48}$, il residuo valore della restante ultima porzion di *voluta* terminata dalla retta RP, e dal punto Q risulta * $= \frac{29}{432}$ circolo CQ.

Settimo. Ormai ridotte in uno le tre quantità del *triangolo*, e le tre della *voluta*, rileviamo poi in un tratto il valore del *complemento*. Imperocchè

Lo spazio *triangolare* sarà eguale all' aggregato dei tre valori trovati ai paragrafi 1. 3. 5. cioè $= \frac{7}{432} + \frac{49}{432} + \frac{133}{432}$, in tutto $= \frac{189}{432}$ circ. CQ.

Lo spazio della *voluta* fia eguale ai tre valori segnati

(1) Nota alla pag. 32. n. 10.

gnati ai paragrafi 2. 4. 6. cioè $= \frac{7}{54} + \frac{177}{1296} + \frac{29}{432}$ in tutto $= \frac{144}{432}$ circolo CQ.

Lo ſpazio del *complemento* viene per conſeguenza ad eſſere $= \frac{99}{432}$, differenza di $\frac{189}{432}$ (valor del *triangolo*) + $\frac{144}{432}$ (valor della *voluta*): cioè differenza della ſomma $= \frac{333}{432}$ all' intiero circolo maſſimo CQ $= \frac{432}{432}$, perchè $\frac{432}{432} - \frac{333}{432} = \frac{99}{432}$.

Dunque li tre ſpazj compreſi ec. ſono come ſegue: cioè

Il *triangolo* $= \frac{189}{432}$. circolo CQ.

La *voluta* $= \frac{144}{432}$. circolo CQ.

Il *complemento* $= \frac{99}{432}$. circolo CQ.

Ovvero ridotti detti valori ai minimi termini.

Il *triangolo* $= \frac{21}{48}$. circolo CQ.

La *voluta* $= \frac{16}{48}$. circolo CQ.

Il *complemento* $= \frac{11}{48}$. circ. CQ. Il che era ec.

An-

Digitized by Google

ANNOTAZIONE I.

Dunque queſti tre ſpazj ſono come li numeri 21.16.11, ſono, diſſi, in progreſſione aritmetica creſcente per 5.

ANNOTAZIONE II.

Con queſto eſempio viene moſtrato il modo d'indagare il valore di detti Piani nel caſo d'altre ragioni date di velocità, come dalla ſeguente Tavola.

Velocità	*Triangolo*	*Voluta*	*Complem.*
1/2	3/12	4/12	5/12
Velocità	***Voluta***	***Complem.***	***Triangolo***
2/3	8/27	9/27	10/27
Velocità	***Complem.***	***Voluta***	***Triangolo***
3/4	11/48	16/48	21/48

Ma benchè ſarebbe ſtato opportuno di tirare innanzi detta Tavola ad alcuni altri gradi di velocità, come $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7}$ ec. per moſtrare, ſe non altro, la progreſſione che regna nel ſucceſſivo valore di detti piani, o ſpa-

Digitized by Google

o ſpazj ſpirali; con tutto ciò ſgomentato da tante calcolazioni, volontieri me ne ſono rimaſto, laſciando altrui queſta briga, quando loro pareſſe che vi foſſe il prezzo dell' opera; mentre io non ſo vedere a che poteſſe giovare la pratica di tali figure, ſe non foſſe per variare così un pavimento rotondo, o qual altro piano di ſtanza deſtinata per qualche dotta adunanza.

ARTICOLO IV.

Valore del piano elevato, o ſia ſtrada a ſpirale HADPKFV *ſoſtenuta dai quattro ſolidi delle Fig.* 28. 29. 30. 31.

ANzi che io parli del valore propoſto, è di meſtieri avvertire una coſa importante. Il condurre per arte un piano inclinato intorno ad un ſolido, come ſarebbe ad un cilindro circolare o elittico, è poſſibile; ma il condurlo intorno ad una retta credo, come abbiamo altrove accennato, che non rieſca. Ora finchè lo ſpazio orizzontale vien compreſo dalla ſpirale, mentre è ancora parallela a ſe ſteſſa (qual' è lo ſpazio ſpirale (*Fig.* 29. e 31.) parallelo finito quinci dalla retta *c a*, e quindi dalla retta *b t*) il piano inclinato che ſovraſtà a detto ſpazio, ſalendo s' aggira intorno a un ſolido, come anche dal confronto del piano orizzontale coll' elevato appariſce, e così va bene: ma quando detto ſpazio orizzontale, perduto il paralleliſmo vicino al centro *c*, ed *a*, ſi diſpone ad unirſi in un punto, qual' è

qual' è per esempio lo spazio *c r a c*, dà me allora chiamato *voluta piana*, il piano inclinato che sovrasterebbe a detta *voluta c r a c* non può essere, perchè bisognerebbe che salendo si facesse ravvolgere intorno ad una retta che sta imminente al centro *c*, ed è l' asse QV della figura, il che per arte, come ho detto, non credo che sia possibile. Onde bisogna detta porzion di piano lasciarla orizzontale, e perdere tutta quella parte di salita, che dovrebbe fare intorno ad una retta. Lo stesso accade nel caso di una discesa, di cui se ne perde tanta parte, quanta il piano inclinato ne dovrebbe pur avere, se continuasse a girare anche intorno alla prefata retta. Ma badate che la cosa torna assai meglio così; imperocchè o che si salga, o che si scenda, fino in un punto, a che fare? Laddove una pianura, cui si troviamo saliti o discesi, può servire a qualche uso, e impiegarsi con vantaggio e con piacere. Da tutto questo conchiudo che nel calcolare la misura delli tre primi piani elevati proposti in questo Articolo devesi dapprima prescindere da quella porzion di piano che sovrastà alla *voluta piana*, da me detto *finimento*, poi aggiungervi detta *voluta piana* non calcolata ed accresciuta come piano elevato, ma solamente presa per tanta, quanta risulta nel piano orizzontale.

Torniamoci intanto a memoria, che quando (Articolo II.) abbiamo favellato dell' origine di questi solidi, fu supposta (*Fig.* 27.) la base C A del triangolo C A B = alla lunghezza di tutta la zona, o spazio orizzontale delle Fig. 28. 29. ec. e l' ipo-

Digitized by Google

l' ipotenusa B A = a tutto il piano inclinato V F K P ec. Ora poichè vogliamo che il piano che sovrastà alla *voluta piana c r a*, cioè il *finimento* non sia inclinato ma orizzontale, supponeremo che C *h* (*Fig.* 27.) sia = (*Fig.* 29.) alla lunghezza della *voluta lineare c r a*; e alzata *h g*, si meni la parallela *g e*, che via recide il triangolo B *e g*. Così averemo da calcolare la lunghezza del piano inclinato soltanto da *g* fino in A, corrispondente a quella porzion di piano orizzontale *a n b e t*, che comincia e continua dopo detta *voluta lineare c r a*.

Ma acciocchè tanto la base C A riesca veramente eguale alla vera lunghezza del piano orizzontale, quanto le porzioni C *h*, *h* A alle rispettive porzioni orizzontali *c r a*, *a n b e t*; bisogna fare detta base = ad una spirale media segnata a puntini che divida per mezzo tutto lo spazio chiuso fra gli avvolgimenti della spirale; siccome pure C *h* = alla porzion media che perviene fino a *c a*; ed *h* A = alla restante media da *c a* fino a *b t*. Onde risulti poi anche tutta l' ipotenusa B A = a tutta la lunghezza media del piano inclinato V F K P ec. e le porzioni di detta ipotenusa B *g*, *g* A = alle porzioni medie di detto piano rispettive V F K, K P D A H; e quindi abbiasi ragion di dire (giacchè la larghezza dei due piani, orizzontale, e inclinato, è la medesima) che detti piani stieno in ragion della loro lunghezza media, cioè di C A a B A, e le porzioni parimenti *c r a*, V F K, come C *b*, B *g*; ed ancora quelle da *c a* fino a *b t*, e K P D A H, come *h* A, *g* A; mentre la curvatura del piano non altera la quan-

tità, per ciò che abbiamo esposto (1) in proposito delle *corone circolari*.

Indicheremo ora il modo, benchè poco corretto, non ostante sofferibile, come (2) ho detto altrove, in pratica, di determinare la lunghezza di detta spiral media, e sue porzioni.

PROPOSIZIONE I.

I. Data (*Fig.* 29.) la spiral *cranbes* di tre rivoluzioni, dico che la spiral media che da *c* va a terminare a *bs*, è $= 2\frac{1}{12}$ semiperiferie circ. *cs*.

II. Data la spiral *cra* di prima rivoluzione, e la media, che da *c* perviene a *ca*, di mezza rivoluzione, dico che detta media è $= \frac{1}{4}$ semiperiferia circ. *ca*; ovvero $= \frac{1}{12}$ semiperiferia circ. *cs*.

DIMOSTRAZIONE.

Primo. Data la spirale *cranbes* di 3 rivoluzioni, e la *cranb* di 2, la spiral media che dal centro *c* va a terminare in *bs*, sarà di rivoluzioni $2\frac{1}{2}$ (intendo ai primi supposti dati nelle figure). Ma la spirale

(1) Tratten. I. Artic. I. Prop. Coroll. III.
(2) Nota alla pag. 32. n. 2.

Digitized by Google

ſpirale completa di 3 rivoluzioni ſta (1) alla ſpirale media di rivoluzioni $2\frac{1}{2}$, come il quadrato 144 del raggio $ct = 12$, al quadrato 100 del raggio della ſpirale media $= 10$. Dunque, eſſendo poi (2) la ſpirale di 3 rivoluzioni $= 3$ ſemiperiferie circ. ct, la ſpirale media che termina a bt, ſarà (giacchè $144.100::3.2\frac{1}{12}) = 2\frac{1}{12}$ ſemiperiferie circ. ct.

Il che era la prima parte da dimoſtrarſi.

Secondo. Data la ſpirale cra di prima rivoluzione, ſarà la media di $\frac{1}{2}$ rivoluzione; ma la ſpirale di prima rivoluzione cra ſta alla media di $\frac{1}{2}$ rivoluzione, come (3) il quadrato 16 del raggio generatore $ca = 4$, al quadrato 4 del raggio della ſpirale media $= 2$. Onde eſſendo poi (4) la ſpirale di prima rivoluzione $= 1$ ſemiperiferia circ. ca, riſulta la ſpirale media (per queſta proporzione $16.4::1.\frac{1}{4}), = \frac{1}{4}$ ſemiperiferia circ. ca; ovvero (giacchè le periferie ſono in ragion dei raggi loro

I 2

(1) Nota alla pag. 32. n. 4.
(2) Nota ſuddetta, n. 1.
(3) Nota ſuddetta, n. 2.
(4) Nota ſuddetta, n. 1.

Digitized by Google

ro $ca = 4$, $ct = 12$) $= \frac{1}{12}$ ſemiperiferia circolo ct.

Il che era l' altra parte .

COROLLARIO I.

Quindi ſeguita che volendo (*Fig.* 27.) che la baſe C A del triangolo C A B ſia = alla lunghezza della ſpirale media che da c ſcorre fino a bt, detta baſe riſulterà $= 2\frac{1}{12}$ ſemiperiferie circ. ct; e la porzione C b che deve eſſere = alla lunghezza della ſpirale media, che da c va fino a ca confine della *voluta piana* cra, riuſcirà $= \frac{1}{12}$ ſemiperiferia circ. ct; e l' altra porzione $bA = 2\frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 2$ ſemiperiferie circolo ct.

COROLLARIO II.

Suppoſto ora il lato B C = per eſempio $1\frac{1}{12}$ ſemiperiferia circolo ct, poſſiamo determinare anche l' altezza hg acquiſtata dal piano inclinato da A fino in g; perchè nel triangolo A B C eſſendo A C . C B : : A h . hg, e rilevate già $AC = 2\frac{1}{12}$. $CB = 1\frac{1}{12}$: : A $h = 2$. hg, riſulta $hg = 1\frac{1}{25}$ ſemiperiferia circ. ct.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSIZIONE II.

Suppoſto (*Fig.* 27.) A $h = b$, $hg = d$, ſpazio orizzontale (*Fig.* 29.) da bt fino al principio ca della *voluta piana* $arc = p$, dico che il piano inclinato P dal principio della ſalita H fino in K (*Fig.* 29) ovvero (*Fig.* 27.) da A fino in g, principio del *finimento*, è $= p \times \frac{\sqrt{bb+dd}}{b}$.

DIMOSTRAZIONE.

Dalle coſe ſopra eſpoſte rileviamo, che come ſta la lunghezza dello ſpazio orizzontale ſuddetto alla lunghezza del piano inclinato; così, per eſſere detto ſpazio e piano di egual larghezza, ſta detto ſpazio a detto piano inclinato; ma la lunghezza del piano inclinato P è per la coſtruzione = all' ipotenuſa $Ag = \sqrt{bb+dd}$. Dunque poichè $b . \sqrt{bb+dd} :: p . P$, riſulta il piano inclinato $P = p \times \frac{\sqrt{bb+dd}}{b}$. Il che era ec.

ANNOTAZIONI.

Primo. Toſto rimarco che a detto piano inclinato ſi aggiungerà poi il *finimento*, che, come abbiamo detto, è ſimile ed eguale alla *voluta piana* orizzontale cra.

Se-

Secondo. Tutto ciò che abbiamo diviſato per rilevare il valore del piano inclinato della Fig. 29. baſterebbe per comprendere il modo di determinare il valore degli altri piani inclinati delle altre figure. Ma non oſtante non parmi inutile l' indicare almeno: primo i confini delle volute; ſecondo le ſpirali medie tanto a dette volute ſpettanti, quanto a' rimanenti ſpazj chiuſi fra gli avvolgimenti paralleli di dette ſpirali.

Circa al primo baſta tornarſi a memoria quanto ſi è rimarcato nella ſeconda oſſervazione del primo Articolo. Circa al ſecondo. Le ſpirali medie devono eſſere di un numero di rivoluzioni medio aritmetico fra il numero delle rivoluzioni dell' altre due ſpirali, per eſempio fra la completa *cra* ec. di tre rivoluzioni, e l' incompleta *comf* ec. di $3\frac{1}{3}$ (*Fig.* 28.) la media riſulta di $3\frac{1}{6}$. Procedendo poi come nella prima Propoſizione di queſto Articolo, troviamo la ſua lunghezza $= 4\frac{1}{12}$ ſemiperiferie circ. *ct*. Per trovare la lunghezza della media che appartiene alla *voluta lineare czo*, oſſerviamo che eſſendo l'arco ſpirale *czo* di $\frac{1}{3}$ di rivoluzione, la media viene di $\frac{1}{6}$. Comparando queſta con la ſpirale *cra*

di

di 1 rivoluzione completa, troviamo che la ſpirale di prima rivoluzione *c r a* ſta alla incompleta di $\frac{1}{6}$, come 36 quadrato del raggio *c a* = 6 (cioè = 3 X 2) al quadrato 1 del raggio della media = 1; e perchè la ſpirale di prima rivoluzione è = 1 ſemiperiferia circ. *c a*, per queſta proporzione 36. 1 :: 1. $\frac{1}{36}$, la ſpiral media riſulta = $\frac{1}{36}$ ſemiperiferia circ. *c a*, ovvero (giacchè le ſemiperiferie ſono come i raggi *c a* = 6, *c t* = 18) = $\frac{1}{108}$ ſemiperiferia circ. *c t*, in proporzione inverſa argomentando.

La ſpirale *c m f g d q u* (*Fig.* 30.) è di rivoluzioni 3 $\frac{1}{3}$. Tutta la media, ſi badi bene, taglierà le *c f*, *a d*, *b u* per metà, e ſarà di rivoluzioni 2 $\frac{5}{6}$.

La *voluta lineare* comprende una rivoluzione, come la Fig. 29. onde la media ſpettante a detta voluta ſarà di $\frac{1}{2}$ rivoluzione. Non occorre di più.

La ſpirale della Fig. 31. è di tre rivoluzioni; la media di 2 $\frac{1}{2}$; ma rimarco che detta media nel ſuo

ſuo corſo taglia prima *c a* per metà, indi *s'* interſeca con la ſpiral principale nel punto *a*, e va poi a finire nella metà di *a b*, ovvero di *c s* che tanto fa; coſicchè la media ſpettante alla *voluta lineare c r a*, che è completa, rieſce tuttavia di rivoluzioni $\frac{1}{2}$.

Nemmeno qui fa biſogno di ſuggerire altro. Con queſte notizie ſiamo a portata di diſponere da noi ſteſſi il rimanente per conſeguire il valore del piano inclinato appartenente a queſta figura; la quale a riflettervi è una parabola, il di cui aſſe *s'* incurva in una ſpirale archimedea, che è la media, perchè le ordinate a detta media ſono creſcenti in proporzione aritmetica; e però vi ſi può applicare il già detto (1) in propoſito del triangolo con l'aſſe diſteſo ſu la periferia di un circolo.

ARTICOLO V.

Della ſuperficie verticale dei 4 ſolidi eſpreſſi nelle Fig. 28. 29. 30. 31.

PRimo. Reſta ora d'indagare la ſuperficie di detti ſolidi. Importa poco quella del primo ſolido della Fig. 28. perchè veramente non è che lo ſcheletro di quello della Fig. 29. 30. Non oſtante dirò che queſta ſarebbe eguale all'area del triangolo ABC della Fig. 27. due volte preſa: cioè preſa una volta per la ſuperficie eſterna, ed un'altra per l'in-

(1) Tratten. I. Artic. II.

Digitized by Google

l' interna ; quando però il lato CA di detto triangolo , foſſe eguale alla ſpirale media fra le due che formano il bordo della zona , o piano orizzontale ; e però queſta ſuperficie ſarebbe poi = CA X CB,

ovvero = $\overline{CA + Ch}$ X *hg* , ſe ſi vuole preſcindere dal triangolo B*eg*, che appartiene al *finimento* .

Secondo . La ſuperficie poi dell' altro ſolido (*Fig.* 29.) non tutta compariſce allo ſcoperto , non tanto quella interna , che già più non ſi conta , ma nemmeno quella eſterna , perchè la porzione della ſuperficie più in dentro ci vien tolta via , e ricoperta da quella delle parti più in fuori , che le ſtanno d' avanti . Per intender queſto con più facilità ſupponiamo che la ſpirale eſterna (*Fig.* 28.) ſia di tre rivoluzioni complete , cioè = alla ſpirale liſcia *cra* ec. ed eguale alla baſe CA del triangolo della Fig. 27. Ora ſembrerebbe che la ſuperficie eſterna , per la coſtruzione addotta di queſti ſolidi , doveſſe eſſere eguale a tutta l' area del ſuddetto triangolo , ma per moſtrare come la non ſia così , conviene anticipatamente ricordare che (1) la prima ſpira *cra* , la ſeconda *anb* , la terza *bes* ec. ſtanno proſſimamente , come i numeri 1.3.5. ec. ed eſſendo la ſpiral orizzontale di 3 ſpire , la poſſiamo conſiderare come diviſa in 9 parti , e non altrimenti diviſo in 9 parti il lato ad eſſa eguale AC (*Fig.* 27.) del triangolo ABC , di cui la prima parte C*h* corriſponde alla prima ſpira *cra* = 1 della ſpiral orizzontale ; la ſeconda *hd* alla ſeconda ſpira

(1) Nota alla pag. 32. n. 3.

anb = 3 ; la terza *d*A alla terza ſpira *bes* = 5 ec. Riflettiamo ancora , che quando il triangolo ABC (*Fig.* 27.) è accartocciato , la porzion di triangolo CB*gb* forma la porzion di cartoccio (*Fig.* 28.) VFK, che ſta eretto ſu la prima ſpira *cra* ; l' altra porzion di triangolo che ſegue, *gbqd* forma la ſeconda porzion di cartoccio KPD , che inſiſte ſu la ſeconda ſpira *anb* ; e finalmente l' ultima porzione di detto triangolo *qd*A forma la terza porzione di cartoccio DAH, che inſiſte ſu la terza ultima ſpira *bes*. Ora queſta terza porzion di cartoccio DAH copre una parte della ſuperficie del ſecondo cartoccio DPK, e queſta ſeconda DPK ne copre una parte di quella della prima porzione KFV: cioè (*Fig.* 27.) la terza porzion triangolare A*dq* copre della ſeguente porzione *qdgb* la parte triangolare tratteggiata con ombra denſa *dxb* , che ha per baſe la *db* lunghezza della ſeconda ſpira , e per altezza *bx* = *qd* altezza del triangolo A*qd*. Così il trapezio *qdbg* della ſeconda porzione copre della prima porzione *gb*CB la parte diſtinta con ombra ancor più denſa , e contenuta nel trapezio *xb*C*e*, che ha per baſe *b*C = alla prima ſpira, un lato *bx* = *qd*, e l' altro lato C*e* = *bg*. Dunque poichè il triangolo ABC ſi ſuppone eguale a tutta la ſuperficie eſterna del cartoccio , l' area di tutto il triangolo — *dxb* , e — *xb*C*e* , cioè il rimanente rettilineo leggiermente adombrato A*dxe*BA , ſarebbe eguale a tutta la ſuperficie verticale ſcoperta del ſolido della Fig. 29. quando non ſi voglia levar via anche il triangolo *g*B*e* laſciato in bianco , che al *finimento* ſi aſpetta .

Per

Per quello poi che riguarda al valore del triangolo dhx, e del trapezio $xhCe$, è facile a determinarlo; imperocchè circa al triangolo, essendo per il supposto noti li tre primi termini di questa proporzione AC (= alla spirale esterna). CB (= alla data altezza del triangolo) :: Ad ($= \frac{5}{9}$ di detta spirale esterna). dq; viene manifestato anche il quarto dq, cui hx è eguale, dico $= \frac{CB \times Ad}{AC}$. Il lato poi dh è $= \frac{1}{3}$ di tutto il lato AC, cioè $= \frac{3}{9}$ della suddetta spirale; onde ecco il triangolo già fatto noto. Rileviamo poi il trapezio $xhCe$ per quest' altra proporzione AC.CB :: $Ah.hg$, in cui essendo noti li tre primi termini, si manifesta il valore del quarto $hg = Ce = \frac{CB \times Ah}{AC}$ indicato già nella Proposizione prima dell' antecedente Articolo. Sono poi noti anche i lati $hx = dq$ trovato ora, ed $hC = \frac{1}{9}$ della spirale esterna. Finalmente resta il triangolo da recidere geB, il quale, essendo noto $ge = hC = \frac{1}{9}$ della spirale esterna, e per la proporzione AC.CB :: $ge.eB$, della quale

ſono noti tutti li tre primi termini, riſulta il quarto $eB = \frac{CB \times ge}{AC}$. Onde per fine detratto dall' intiero triangolo ABC il triangolo dhx + il trapezio $xhCe$ + il triangolo geB, reſta tutta la ſuperficie verticale ſcoperta di detto ſolido della Fig. 29. = (*Fig.* 27.) al rettilineo $Adxegd$ leggiermente ombreggiato.

Terzo. Il ſolido della Fig. 30. non eſſendo diverſo dall' antecedente in altro, ſe non che una porzion del ſuo piano elevato di una certa groſſezza ſporge più in fuori, ed il ſuo circuito eſteriore viene circoſcritto da una ſpirale maggiore di quella che termina la reſtante maſſa; perciò prendaſi prima la ſuperficie verticale di queſto ſolido nella maniera che ſi è preſa quella del ſolido antecedente; indi a queſto riſultato aggiungaſi la differenza del prodotto di ciaſcheduna ſpirale moltiplicata nella data groſſezza. E chiaro che così averemo l' intiera quantità della ſuperficie propoſta.

Quarto. La ſuperficie verticale finalmente del ſolido rozzamente effigiato nella Fig. 31. dopo le coſe dette, non ho d' uopo di dimoſtrare, che ſe foſſe per arte poſſibile, o trovatolo in natura, ſarebbe eguale al prodotto della ſpirale eſteriore HAD ec. che termina il bordo del piano inclinato, nella groſſezza di detto bordo moltiplicata.

AR-

Digitized by Google

ARTICOLO VI.

Massa dei 4 solidi precedenti.

QUando alcuna attenzione poniamo intorno al solido rappresentato nelle Fig. 28. e 29. si accorgiamo di leggiero che gli è composto di tre diversi pezzi uniti insieme, il primo de' quali occupa con la sua base tutto lo spazio orizzontale, eccettuata la *voluta piana*, e però terminato nella Fig. 28. fra le rette *co*, *tu*; e nella 29. fra le rette *ca*, *bt*. E se gli fosse tolta via la spiral curvatura, sarebbe un prisma di tre faccie quadrangolari, e due triangolari, della forma del pezzo 1 (*Fig.* 32.) di cui un triangolo laterale corrisponde al triangolo *Agh* della Fig. 27. Questo primo pezzo con una faccia quadrangolare verticale si attacca ad una faccia eguale quadrangolare e verticale del seguente pezzo 2 (benchè in figura si lasci appostatamente separato) che è pure un prisma che ha per base la picciola *voluta piana czoc* nella Fig. 28. *crac* nella Fig. 29. e riesce di eguale altezza al primo; corrisponde nella Fig. 27. al rettangolo *Cegb*. Sopra questo pezzo 2 si erge (benchè sia in figura distante) un terzo pezzo 3 (*Fig.* 32.) il quale siccome dalla base al vertice decresce secondo l' ordine naturale de' numeri in progressione de' quadrati, così egli è una specie di piramide di quattro faccie, una delle quali, cioè la base, è appunto eguale allo spazio orizzontale compreso dalla medesima *voluta piana*.

Cor-

Digitized by Google

Corrisponde nella Fig. 27. al triangolino B *e g* .

Quindi seguita che il valore del primo pezzo 1 sia eguale al prodotto della sua base quadrangolare (*Fig.* 32.) ovvero (*Fig.* 28.) della zona terminata dalle rette *c o* , *t u* ; ovvero (*Fig.* 29.) della zona terminata fra le rette *c a*, *b t* , rilevate già nel terzo Articolo, moltiplicata, dico, questa base nella metà dell' altezza che finisce, dove il secondo 2, o il terzo pezzo 3 principia. Il valore del secondo pezzo 2 risulta eguale al prodotto della sua base, cioè della *voluta piana* rilevata pure nel terzo Articolo, moltiplicata in tutta l'altezza che è eguale a quella del primo pezzo, perchè (*Fig.* 27.) corrisponde all' altezza *g b* comune al triangolo A *g b*, ed al rettangolo C *e g b*. Il valore del terzo pezzo piramidale 3 (*Fig.* 32.) è = al prodotto della sua base, cioè pur anche della *voluta piana* suddetta, moltiplicata in $\frac{1}{3}$ della sua altezza, che nella Fig. 27. è *e* B . L'aggregato di tutti li tre valori suddetti dedotti dalle solite regole di geometria, sarebbe la misura completa delle masse dei due solidi proposti; quando bene non occorresse computare quello del terzo pezzo che appartiene al *finimento*, e di cui si prescindesse per quei riflessi che si ebbero fin da principio .

Giacchè poi intervengono nel solido della Fig. 30. i medesimi dati degli altri due solidi sopraddetti, alla solidità rilevata del solido (*Fig.* 29.) aggiungeremo quest' altra. Cioè calcolata a parte quella porzione

zione di piano inclinato che sporge più in fuori, nella maniera con cui (Articolo IV.) abbiamo calcolato il piano inclinato della Fig. 28. al quale è eguale, si moltiplichi detta porzione per la grossezza, e si aggiunga il prodotto a detta solidità rilevata, come sopra.

Se finalmente il solido della Fig. 31. fosse in qualunque modo, o per arte, o per natura, in cui non si prescinde dal *finimento*, tutto il piano inclinato calcolato già nel quarto Articolo si moltiplichi per la grossezza, e il prodotto sarà la ricercata solidità.

Mi sembrerebbe pertanto di non avere abbastanza adempito ai doveri assunti in questo Articolo, se non mi facessi incontro ad uno scrupolo. Imperocchè avendo io dedotto il valore dei tre pezzi 1, 2, 3 (*Fig.* 32.) dalle solite leggi geometriche, potrebbe alcuno dubitare che a tali leggi non reggessero, e massimamente il primo pezzo, perchè forse la curvatura alterasse la quantità della massa disposta secondo il supposto per dritto. In fatti poniamo (*Fig.* 2. *T. I.*) che li due rettangoli punteggiati siano la base del pezzo 1 (*Fig.* 32.) tagliato in due da un piano verticale parallelo al piano *mzos*, intendendo di restituire per di fuori (*Fig.* 2. *T. I.*) due porzioni solide che sovrastanno sui piani *deb*, *leb* eguali di base alle due tolte via per di dentro che sovrastanno sui piani *fes*, *res*. Ciò facendo (si sollevi, se piace, la fantasia coll' esperimento) succede che la superficie superiore *nato* (*Fig.* 32.) del pezzo (*Fig.* 2. *T. I.*) eretto sopra *nkbs* non cammina egua-

eguale e piana ad unirsi con quella dell' altro pezzo eretto sopra *thbs*; ma il pezzo più alto nel sito della sezione *sb* resta più elevato per di dentro, e più depresso per di fuori dell' altro pezzo più basso, e questo resta per contrario più elevato per di fuori, e depresso per di dentro. Al che rispondo primieramente, che la quantità della massa tuttavia non si altera, perchè questi eccessi e difetti dentro e fuori alternatamente sono eguali; secondariamente dovendosi concepire il numero delle sezioni verticali di detto pezzo 1 (*Fig.* 32.) moltiplicato all' infinito, acciocchè la sua curvatura si conformi, e si addatti a quella di una spirale; perciò in tal caso questi eccessi e difetti reciprochi spariscono, e la superficie di tutto l' intiero corpo così incurvato riesce eguale e continua.

ARTICOLO VII.

Maniera di eseguir sul terreno una strada elevata a spirale.

IO dubito che per quanto abbia procurato di dare ad intendere ciò, che ho detto, pure ognuno non avrà potuto comprenderlo chiaramente, e forse io medesimo sarò stato nel maggior uopo scarso di espressioni, e di parole, perchè mi sia parso che troppo più n' avessi dovuto fare, e il farne molte fosse anche stato soverchio; avvisando che nei solidi di costruzione difficile bene stia di tenersi presente un modello, e non fidarsi alle immagini della sola

Digitized by Google

ſola propria fantaſia, perchè con eſſo maſſimamente quando è preparato di ſua mano, ſi apprende più che con un volume di ſpiegazioni e di figure. Io mi ſono da me fatto una di queſte ſtrade che ſale ad una altezza, ed un'altra che ſcende ad una profondità. Allora fu (*Fig.* 27.) che oſſervai come la porzione triangolare A*dq* veniva a coprire la porzione *dxh* del trapezio *qdhg*; e queſta copriva la porzione *hxe*C del rettangolo *hge*C; e conobbi pure allora la impoſſibilità di far girare un piano inclinato intorno ad una retta. Quando dunque o per ſalire ad una retta, o per ſcendere ad una profondità, dato foſſe di fabbricare una ſtrada a ſpirale, ſi avranno a ſpendere le prime attenzioni nel modello; ma prima ſtabiliremo la quantità dell' angolo d' inclinazione, che dovrebbe avere una tale ſtrada all' orizzonte per qualunque data altezza, rigettando, l' aſſurdità d' un certo mio penſiero che or ora eſpongo, e che forſe in altri caſi potrebbe aver luogo, ma non in queſto.

Io conſidero (*Fig.* 27.) che ſalendo alla data altezza B per la perpendicolare CB, facciamo la via maſſimamente corta, ma maſſimamente incomoda; e ſe a detta altezza B ſi perveniſſe per una parallela ad AC, ovvero per AB diagonale di un rettangolo, di cui un lato ſia CB, e l' altro lato CA infinito, ſi ſalirebbe per la via lunghiſſima, ma inſieme maſſimamente comoda all' azione muſcolare di un animale. Per evitare dunque parte di queſti alterni diſcapiti, e conſigliare inſieme parte del vantaggio della più corta via con quello della più co-

moda, ſembra che foſſe opportuno di trovare un termine medio fra il lato CB di quantità finita, e la ſuddetta diagonale BA di un rettangolo lungo all' infinito; ma queſto termine medio riuſcendo pur eſſo infinito, perchè è infinita la diagonale, ſi rende del pari impoſſibile. Nulladimeno a queſto propoſito mi ſovviene che in Ottica, dato l'angolo A = 30, per li cannoni trigonometrici riſulta BC. AC :: 1. 6877; e quindi per sì enorme diſparità di BC ad AC, le linee AC, AB ſi poſſono prendere come paralleli, che è lo ſteſſo che dire, come infinite. Dunque prendendo un termine medio fra 1, e 6877, cioè la diagonale di un rettangolo con un lato = 1, e l' altro lato = 6877, ſi prenderebbe un termine che parteciperebbe di BC ſalita la più corta ma più incomoda, e della diagonale AB parallela per il ſuppoſto all' orizzontale AC, e per conſeguenza infinita, che è per contrario la più lunga via, e la più comoda. Ma che prò? Supponendo ancora AB = 6877 incirca, riſulterebbe un angolo d' inclinazione A minore di un minuto primo, troppo diſtante da quello che indica l' eſperienza. Imperocchè io trovo che un angolo d' inclinazione di gr. 8, rieſce di una buona ſalita sì per gli uomini, che per gli animali, e volendo preſcindere anche da qualunque determinazione d' angolo, per non dover ricorrere ad ogni tratto agl' iſtromenti trigonometrici, trovo che poſto CB. AC :: 1. 6, ciò che porterebbe un angolo d' inclinazione di gr. 9; e quaſi mezzo, la ſalita rieſce tuttavia aſſai praticabile

cabile. Per altro secondo che la strada fosse destinata più ad un uso, che ad un altro, diversi altri angoli d'inclinazione si potrebbero mettere in pratica.

PROPOSIZIONE I.

Data l'altezza di Piedi 60, a cui si debba ascendere per una strada a spirale; per esempio di 3 rivoluzioni. Dico che la base di una tal fabbrica, cioè la lunghezza della spirale orizzontale (*Fig.* 29.) *c r a* ec. sarà = P. 405.

DIMOSTRAZIONE.

Poichè la spirale che s'impiega in *voluta*, cui (*Fig.* 27.) corrisponde C*h*, non porta altezza, e che perciò la salita da A giunge a terminare solamente in *g*, perciò deve essere *g h* = P. 60. Ora nel triangolo A B C abbiamo *g h*. *h* A :: B C . C A; e B C . C A :: 1 . 6, come sopra. Dunque *g h* . *h* A :: 1 . 6. E perchè *g h* = P. 60, per quest' altra proporzione 1 . 6 :: 60 . 360, risulta *h* A = P. 360. Supposto inoltre che C*h* sia eguale alla spirale di prima rivoluzione (*Fig.* 29.) *c r a* impiegata in *voluta*, sarà (*Fig.* 27.) *h* A = alla spirale di seconda rivoluzione + la spirale di terza rivoluzione: dico = *a n b* + *b e t* (*Fig.* 29.). E perchè le spirali di rivoluzioni 1, 2, 3 ec. sono (1) come 1 . 3 . 5 . ec.

perciò sarà C*h* = $\frac{h\,A}{3+5} = \frac{360}{8} = 45$; e quin-

(1) Nota alla pag. 32. n. 3.

Digitized by Google

di tutta la baſe C A della fabbrica propoſta, cioè la lunghezza della ſpirale orizzontale (*Fig.* 29.)

$\overline{c\,r\,a}$ ec. $= 45 + 360 =$ P. 405. Il che era ec.

ANNOTAZIONE.

Se foſſe data la ſtrada a ſpirale, e ſolido della Fig. 28. in vece di quello della Fig. 29. ſi conſiderebbe la principal ſpirale orizzontale *c r a* ec. come (*Fig.* 27.) $= b$A, rimanendo la voluta C$b =$ alla porzione *c z o* dell'altra ſpiral parallela *c z o m* ec. la quale ſenz'eſſer calcolata verrebbe da ſe, col ritenere nella coſtruzione i punti di detta ſpirale *c z o m* ec. diſtanti da quelli della ſpirale liſcia principale *c r a* ec. una quantità coſtante $= co$. Nulla accade poi di rimarcabile nella fabbrica del ſolido e ſtrada della Fig. 30. di cui il piano orizzontale è lo ſteſſo, che quello della Fig. 29. perchè lo ſporto del piano inclinato ſta tutto in aria ſoſtenuto, ſe ſi vuole, da' modiglioni, o da altro.

PROPOSIZIONE II.

Data la ſpirale *c r a* ec. di 3 rivoluzioni = P. 405, come ſopra, dico che il raggio *c t* del circolo maſſimo ſarà = P. $42 . \frac{21}{22}$.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo (1) la ſpirale di 3 rivoluzioni = 3 ſemi-peri-

(1) Nota alla pag. 32. n. 1.

Digitized by Google

periferie circ. ct, il circolo ct, che è eguale a 2 ſemiperiferie, ſarà $= \frac{2}{3}$ di P. 405 $=$ P. 270, ed eſſendo poi ſecondo Archimede la circonferenza al diametro proſſimamente, come 22.7, quindi per queſta proporzione 22.7::270.85 $\frac{10}{11}$, riſulta il diametro $=$ P. 85 $\frac{10}{11}$, ed il raggio $ct =$ P. 42 $\frac{21}{22}$. Il che era ec.

COROLLARIO.

Quindi viene il raggio del circolo di prima rivoluzione $ca = \frac{ct}{3} =$ P. 14 $\frac{7}{22}$, ed il raggio del circolo di ſeconda rivoluzione $cb = \frac{2\,ct}{3} =$ P. 28 $\frac{7}{11}$.

Ora da queſte due propoſizioni rileviamo tutti i dati neceſſarj alla coſtruzione del modello; imperocchè dalla prima propoſizione (*Fig.* 27.) e ſuo conteſto riſulta $Cb =$ P. 45; $bA =$ P. 360; quindi tutta la baſe $CA =$ P. 405. L'altezza poi data $bg =$ P. 60. Dalla propoſizione ſeconda abbiamo il raggio del circolo di prima rivoluzione $ca =$ P. 14 $\frac{7}{22}$; il raggio di ſeconda rivoluzione $cb =$ P. 28 $\frac{7}{11}$; finalmente il raggio di terza rivo-

rivoluzione $ct = P.42\frac{21}{22}$. Non reſta dunque che di eſeguire, e riportare un modello concepito ſu queſti dati ſul terreno.

Sempre che ci accade di far rifleſſo a quelle moli ſtupende che tuttavia reſtano avanzi dell' antichità, alto concetto formiamo del valore di quegli Architetti, e ci duole che non tanto dei grandi ſpedienti, ma dei più piccioli ancora impiegati nell' effettuare impreſe sì belle, non abbiaſene ſempre tramandata memoria nei poſteri. Imperocchè ſiccome i gran Coloſſi, le Colonne, gli Obeliſchi deſtano maraviglia, perchè l' idea della loro grandezza non va diſgiunta da quella delle difficoltà dei mezzi, coi quali ſono ſtati traſportati ed eretti; così negli Anfiteatri, nei Mauſolei, nelle Terme, nelle Naumachie non ammiriamo la ſola grandezza e proporzione delle parti, ma ſommamente ancora la figura del loro contorno ardua ad eſeguirſi. Concioſiachè con quale ingegno tracciar ſul terreno tante vaſte eliſſi ſimili, e concentriche, e tanti circoli ſmiſurati? e compartire i loro perimetri in tante eguali e ben ordinate diſtanze? Forſe il Sig. Perrault ſentì la forza di queſta difficoltà, onde nel ſuo Vetruvio ſi ſtudiò di preparare un iſtromento per deſcrivere de' gran circoli, e ne produſſe uno, il quale in fatti, benchè ſia di ſoli 15 pollici, giunge a deſcrivere un circolo di 30 pertiche. Averei io pure un ſimile iſtromento (1) non più di 4 pollici

(1) *Deſcriz. Organ. delle Curve*, Fig. 2. Tav. 7.

ci lungo, atto teoricamente a descrivere qualunque gran circolo dato, fosse pur anche infinito, e diventato una retta, perchè descrive la retta, e torna dall' infinito a descrivere qualunque dato circolo finito dalla parte opposta. Ma per dirla finceramente questi istromenti non mi finiscono. Sono abbandonati a se stessi, possono deviare per l' ineguaglianza del terreno, per la direzione della potenza che gli spinge al moto, mal collocata ec. Or come faremo noi dunque a delineare il massimo circolo generatore della nostra spirale? e compartirlo in tante eguali parti, quante ne occorrono per la descrizione di essa? Benchè varie maniere si potrebbero investigare, non ostante loderei sopra tutto che si facesse girare una diottra di 3 piedi intorno al centro di una tavoletta di egual diametro, e che facendo passare la linea visuale per tutte le divisioni del suo lembo graduato, quindi si segnassero sul terreno altrettanti raggi con delle palline, i quali ad uno ad uno fossero con effettiva perticazione ridotti alla lunghezza del raggio del circolo dato. Questo metodo non ha limiti, ad ogni circolo, ad ogni compartimento si addatta. Così dunque supponiamo che sia descritta, e divisa la periferia del nostro massimo circolo, e i raggi segnati.

Per quel che riguarda ora alla descrizione della spirale orizzontale *c r a* ec. si appresti una cordicella, o più tosto una riga di legno, se è possibile, sottile, pieghevole ed elastica, lunga P. $14\frac{7}{22}$, cioè

quan-

quanto è lungo il raggio del primo circolo generatore *c a*, e dividaſi in tante eguali parti, quanti ſaranno i raggi condotti nel medeſimo circolo per detta deſcrizione ; perchè riportando poi una di dette parti o diviſioni ſul primo raggio, 2 ſul ſecondo, 3 ſul terzo ec. averemo ſopra detti raggi marcati altrettanti punti della ſpirale di prima rivoluzione. Nella ſeconda rivoluzione ſul primo raggio riporteremo tutta la cordicella, o riga + una diviſione di eſſa ; ſul ſecondo tutta la riga + 2 diviſioni ec. Nella terza rivoluzione riporteremo ſul primo raggio due volte tutta la cordicella o riga + una diviſione di eſſa ; ſul ſecondo raggio 2 volte tutta la riga + 2 diviſioni, ſul terzo raggio 2 volte ec. finchè per cadauna rivoluzione ſieno ſegnati tanti punti, o elementi della ſpirale, quanti ſono i raggi fin al circolo di maſſima rivoluzione. Per marcare poi anche li punti della curva intermedj a' ſuddetti, ſi preſenti ſul terreno la riga in taglio, indi ſi pieghi, e ſi faccia paſſare e coincidere ſopra tre o quattro di detti punti, perchè menato uno ſtilo che ſtrettamente rada la riga medeſima, e paſſi eſſo pure ſui punti già notati della *ſpirale*, verrà ſegnato un pezzo continuo di ſpirale, che in pratica ſenza error ſenſibile ſi potrà tenere per vero, e geometrico : onde una tale operazione ſarà reiterata fino al fine.

Deſcritta la ſpirale orizzontale *c r a* ec. per determinare poi ſpeditamente, ogni ſei piedi della medeſima, la corriſpondente altezza del piano inclinato, vorrei che ſi ſegnaſſe ſull' altra faccia della pre-

Digitized by Google

prefata riga il quarto termine di queſta proporzione 360 (=*h*A). 60 (=*hg*) :: 6. 1, che è un piede; acciocchè applicando la riga verticale al muro, per ogni ſei piedi di ſua lunghezza troviſi ivi pure pronta e preparata la corriſpondente alzata di P. 1.

ARTICOLO VIII.

Degli uſi di queſta fabbrica.

DA quanto abbiamo ragionato ſin quì, ben ſi vede che io non ho preſuppoſta l' altezza di una collina, nè la profondità di una valle, per accomodarvi una ſtrada a ſpirale; concioſiachè in tal caſo dato l' angolo d' inclinazione, la ſtrada ſarebbe diviſata dagl' Ingegneri in quel medeſimo modo che ſi prepara a livello il nuovo letto di una riviera. Io mi ſono da me ſteſſo fabbricato l' altezza, e la ſtrada per aſcendervi, o pure una profondità, e la ſtrada per diſcendere in eſſa. Ma a che potrebbe mai eſſer buono un così fatto edificio?

Supponiamo che alcuna Terra foſſe ſituata in tale circoſtanza, che grandiſſimo difetto d' acqua patiſſe, e che per ſoſtentamento degli uomini, e degli armenti aveſſeſi ad attignerla da un' altezza per eſempio di 60 piedi, qual comodo per ſupplire al biſogno di quegli, ed abbeverare queſti ſenza fatica non recherebbe una diſceſa edificata a queſto modo; tanto più che a differenza del piano ſagliente a ſpirale della Fig. 22. queſta non avendo il piano di una ſpira, che ſovraſtia a quello dell' altra,

reſta tutta eſpoſta ai raggi diretti di un pieno giorno ?

Se per riporre cannoni , palle , e mortai , o altri peſanti attrecci di guerra non ſi trovaſſe nel Forte a propoſito altro che alcun luogo ſotterraneo ſituato a molta profondità , forſe opportuna ſi terrebbe una tale ſtrada e per calarneli dentro facilmente , e per trarneli fuori .

Se per ornamento di una Città ſi voleſſe a molta altezza ergere un obeliſco , una ſtatua equeſtre (vedaſi il Frontiſpicio) un Mauſoleo , un Trofeo , o qual altro monumento della vanità umana , molto conveniente e magnifica coſa ſarebbe che a quell' altezza in cui foſſe collocato , ſi ſaliſſe per una così fatta via .

Direi ancora che in alcune appropriate ſituazioni queſti tali edifizj potrebbero (come agli antichi Minorchi le narrate Montagnuole di ſaſſi) ſervire di ſpecula , e le Gallerie che vi ſtanno ſotto , per aſilo inſieme ſupplire , e per difeſa .

In ſomma non tutti or ora mi tornano in mente gli uſi , a' quali ſi potrebbero applicare , e forſe ſono così ſoverchj , come per pompa di un cadavere lo erano le gran piramidi d' Egitto ; ma a me baſta d' averne indicati alcuni , e ſe non altro , avere per minuto eſpoſta l' origine , e la miſura di un ſolido , che ſe per altri non lo foſſe , per me è certamente noviſſimo .

TRAT-

Digitized by Google

TRATTENIMENTO III.

Sopra le Spirali Coniche, e certi piani che girano a ſpirale intorno a un Cono.

BElla materia di trattenimento ci porgono quelle, che qui raccolgo, novelle ſpeculazioni intorno al cono. Trattaſi delle ſpirali Archimedee deſcritte intorno ad eſſo, degli ſpazj compreſi fra gli avvolgimenti di dette ſpirali, e del valore di certi piani che a ſpirale ſu la ſua ſuperficie s'aggirano. Il che era molto conveniente dopo avere in altro luogo (1) ragionato di quelli che ſi ravvolgono intorno ad un cilindro. Siccome però non ſo ſe queſto trattato ſia per venire riguardo alla pratica tanto in acconcio, quanto gli altri ſopra eſpoſti; così non ſaprei ſe eſſo ſi foſſe egualmente diretto a un poſitivo vantaggio, oltre quello di paſſar l'ozio con qualche oneſta occupazione.

ARTICOLO I.

Delle ſpirali deſcritte intorno al cono.

QUeſte *ſpirali* da me dette *coniche* ſi ſuppongono (*Fig.* 34.) generate da un punto, il qual par-

(1) Tratten. I. Artic. IV. e V.

partendo dall' apice V cammina equabilmente pel lato VQ, mentre questo equabilmente si muove intorno all' asse VR. Ma prima di venire ad esse, mi occorre di riferire tre proposizioni, che servono di apparecchio alle cose che ad esse si riferiscono, contenute in questo Articolo.

PROPOSIZIONE I.

Un cono rovesciato che ruotasi sul piano dell' orizzonte per un impulso che duri nel suo centro di gravità, deve muoversi in un circolo, che abbia per raggio il lato di esso cono, e nel di cui centro costantemente persiste il vertice del cono medesimo.

Di questa proprietà del cono non accade dubitarne. Il chiarissimo P. Tacquet (1) lo ha dimostrato. Io ancora (2), e non era nemmeno occulta (3) agli antichi.

PROPOSIZIONE II.

La superficie del cono non è altro, che il settore di un circolo.

Questa proposizione è pure stata dal celebre Guglielmo Whiston (4) accennata, e da me pure (5), ma mi piace di ripeterla così:

Di-

(1) *De Circ. volut.* Theorm. 8.
(2) *Nuovi Istromenti per la descr. ec.* Istrom. 6.
(3) Herone Alessandrino. *Degli automi* Lib. 10.
(4) *In Comm. Elem. Andrea Tacquet*, Prop. 10. Archim.
(5) Luogo sopraccitato.

Digitized by Google

DIMOSTRAZIONE.

Tutti gli angoli al vertice di una piramide preſi inſieme ſono minori di quattro retti, perchè ſe foſſero o eguali o più di 4 retti, non potrebbero formare un angolo ſolido. Dunque tutti gli ſpazj, o ſuperficie compreſe fra tutti i detti angoli preſi inſieme, fanno un tutto che è meno di 4 retti, cioè meno dello ſpazio, o area diſteſa intorno al centro di un circolo fra 4 retti compreſa. Ma un cono non è che una piramide d' infiniti lati. Dunque gli ſpazj compreſi fra detti lati infiniti, cioè tutta la ſua ſuperficie diſteſa intorno al vertice, ſarà meno dell' area di un circolo, e per conſeguenza eguale ſoltanto ad un ſettore. Il che era ec.

PROPOSIZIONE III.

La ſuperficie di un cono ſta a quella di un circolo che ha per raggio il lato di eſſo cono, come il raggio della baſe del cono al lato predetto.

Anche queſta Propoſizione è dal celebrato Whiſton (1) dimoſtrata, e da me ancora (2) preſſo a poco in queſta maniera.

COSTRUZIONE.

Con l' apertura VG (*Fig.* 34.) lato del cono GVQ deſcrivaſi (*Fig.* 36.) il circolo SHQF, e diſtinguaſi con l' ombra il ſettore dato eguale alla ſuperfi-

(1) *In Comm. Elem. Tacquet*, Prop. 10.
(2) Luogo ſopraccitato.

Digitized by Google

perficie conica ; e ſuppoſto detto ſettore di materia fleſſibile, approſſimando con egual curvatura, e facendo combacciare i due raggi ES, EQ, ſupponiamo di averne formato il cono ſuddetto GVQ. Il centro E del circolo fia il vertice V del cono ; i raggi ES, EQ ſono diventati il lato VQ del cono ſteſſo ; e la periferia SHQ vien trasformata nella periferia della baſe conica GRQ.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo le periferie come i raggi, la periferia della baſe conica ſarà alla periferia del circolo SHQF, come RQ raggio della baſe conica ad EQ raggio di detto circolo : ovvero, perchè per la coſtruzione EQ = VQ lato del cono, come RQ ad VQ. Ma la periferia della baſe conica è per la coſtruzione = alla periferia ombreggiata SHQ del circolo ſuddetto. Dunque la periferia ombreggiata SHQ ſta a tutta la periferia del ſuddetto circolo, come RQ raggio della baſe conica al lato VQ. Intanto il ſettore SHQ ſta a tutto il circolo, come la periferia del ſettore a tutta la periferia del circolo. Dunque il ſettore ſta al circolo, come il raggio RQ al lato VQ. Finalmente il ſettore ombreggiato è per la coſtruzione = alla ſuperficie conica. Dunque la ſuperficie conica ſta a quella di un circolo ec. come il raggio RQ della baſe al lato VQ di detto cono. Il che era ec.

An-

Digitized by Google

ANNOTAZIONE.

In fatti poichè la ſuperficie conica (1) è in ragion duplicata del lato VQ ad una media fra detto lato, e raggio RQ della ſua baſe, biſogna che detta ſuperficie ſia al circolo SHQF, come il raggio RQ al lato VQ; onde riſultino tre quantità continue proporzionali ∴ Baſe conica. Superficie conica. Circolo SHQF.

Queſte tre propoſizioni premeſſe poſſiamo paſſare alle ſeguenti.

PROPOSIZIONE IV.

I. Una ſpiral qualunque ſegnata ſu la ſuperficie di un cono rotolante in un circolo, che ha per raggio il lato di eſſo cono, ſi devolve, e coi punti ſucceſſivi di eſſa, laſcia impreſſe ſul piano di detto circolo tante ſpirali, quante ſono le ſpire della ſpirale del cono.

II. Sono le *ſpirali* piane, o ſia *devolute*, ciaſcheduna alla *ſpirale conica* eguali.

DIMOSTRAZIONE.

Dalla prima e ſeconda propoſizione di queſto Articolo, ſeguita che il cono (*Fig.* 34.) GVQ rotolando ſpiegherà nel ſettore (*Fig.* 36.) formato nella prima rivoluzione compita intorno al proprio aſſe tutta la ſua ſuperficie; ma perchè la *ſpirale conica* (*Fig.* 34.) VFKPQ tracciata ſopra detta ſuperfi-

(1) VVhiſton, luogo ſopraccitato.

Digitized by Google

perficie è parte di essa superficie, perciò devolvendosi la superficie sul piano EQHS (*Fig.* 36.) necessariamente si devolve anche la spirale, e questa rotta in tante porzioni QKA, B*d*E ec. quante sono le spire (*Fig.* 34.) QPK, KFV ec. della *spirale conica*, che tutta insieme con detta superficie conica, e nel medesimo tempo si devolvono.

Lo stesso accade nelle rivoluzioni che seguono dopo la prima; ma è da riflettere, che mentre segue per esempio la seconda rivoluzione nel prossimo settore ESFQ, vengono sul piano similmente descritte in simili siti, altrettante porzioni S*g*B, A*n*E, simili, ed eguali a quelle della prima rivoluzione nel primo settore, QKA, B*d*E. E perchè poi il punto A, dove termina la prima porzione QKA del primo settore EQHS, ed il punto B dove principia la seconda porzione B*d*E, sono egualmente distanti dal centro E di rotazione; perciò la seconda porzione A*n*E(=B*d*E) tracciata sul piano nella prossima seconda rivoluzione ESFQ viene appunto ad unirsi alla prima porzione QKA del primo settore nell' ultimo punto A di essa. Indi se più di due settori fossero, nella terza rivoluzione vi si aggiungerebbe la terza porzione, e nella quarta la quarta porzione ec. continuando così seguito e continuo l' andamento di tutta la curva.

Inoltre mentre il cono rotolando riporta in cadaun settore tante porzioni, quante ne ha lasciate impresse nel primo, quindi alla fine del giro ne risultano tracciate tante spirali QKA*n*E, S*g*B*d*E, quan-

quante ſono dette porzioni. E perchè dette porzioni ſono, come dicevamo, tante, quante ſono le ſpire della *ſpirale conica*; perciò la *ſpirale conica* ſi devolve nel circolo in tante ſpirali piane, quante ſono le ſpire della *ſpirale conica*. Il che era la prima parte ec.

Secondo. E' poi da ſe manifeſto che eſſendo le porzioni devolute nel primo ſettore eguali cadauna alle corriſpondenti porzioni, e ſpire della *ſpirale conica* (imperocchè VF della Fig. 34. è = E*d* della Fig. 36, VK = EB, VP = EK, VQ = EQ, e così procedendo negli altri punti intermedj); quindi tutte dette *devolute* preſe inſieme ſono eguali a tutte le *ſpire coniche* preſe inſieme, cioè a tutta la *ſpirale conica*. Dunque ciaſcheduna ſpirale piana (che mi giova chiamare *ſpiral devoluta*) che tutte pareggia dette porzioni, ſarà eguale a tutte le ſpire coniche, dico = a tutta la *ſpirale conica*. Il che era l' altra parte.

ANNOTAZIONE.

La ſeconda parte di queſta Propoſizione è tanto vera, che a tracciare (*Fig.* 34.) la ſpirale VFKPQ ſul cono GVQ baſta deſcrivere prima in piano ſopra un ſemicircolo di cartone EQHS (*Fig.* 36.) le due porzioni di ſpirale QKA, B*d*E nella maniera che ſi deſcrivono le ſpirali piane, indi ravvolgere detto cartone in forma di cono, facendo unire e combacciare il raggio EQ col raggio ES, che toſto appariſce ſul cono deſcritta la ſuddetta ſpirale intiera e ſeguita VFKPQ: dal che comprendia-

Digitized by Google

mo che la *ſpiral devoluta*, e la *conica* ſono realmente una ſteſſa coſa.

COROLLARIO I.

La ragione (*Fig.* 34.) del raggio RQ della baſe del cono al ſuo lato VQ, ovvero (*Fig.* 36.) del ſettore ESHQ a tutto il circolo SFQH, può eſſere, o ſorda, o di numero a numero; e perciò laſciando da parte il primo caſo, circa al ſecondo mi occorre d' oſſervare, che la *ſpiral devoluta* QKA*n*E manca, compie, ed eccede il giro intiero intorno al centro di rotazione, ſecondo che il numero delle ſpire coniche (o ſia, che è lo ſteſſo, quello delle porzioni devolute QKA, B*d*E ec.) accaderà che ſia maggiore, eguale, o minore del numero dei ſettori eſaurienti l' area del circolo. Imperocchè dati per eſempio li ſettori due, e le devolute tre, o quattro, la *ſpiral devoluta* avrebbe ecceduto il giro intiero di tre, o quattro ſettori del circolo. Date per eſempio le *devolute* due, e li ſettori tre, o quattro, la *ſpiral devoluta* avrebbe occupato due ſettori. Nel caſo della figura che il numero delle *devolute* pareggia quello dei ſettori, la *ſpiral devoluta* compie per lo appunto il giro intiero. Queſti lumi baſtano ſenza proſeguire un detaglio più minuto dei caſi che ſuccederebbero, quando il ſettore foſſe al circolo in qualunque altra ragione. Ma in tutti i caſi la *ſpirale conica* è eguale alla *devoluta*, e perciò ritiene tutte quelle proprietà, che alle ſpirali piane appartengono: ſcopo principale di queſta Propoſizione. E però

Co-

Digitized by Google

COROLLARIO II.

Qualunque sia vero, o falso, o prossimo il valore che si attribuisce alle spirali piane dal Wallis (falso certamente, e nemmen prossimo a dovere, come or ora mostreremo) del pari alle *spirali coniche* si può applicare; onde nel caso della figura, in cui si suppone (*Fig.* 34.) QR ad VQ, e così anche il settor conico al circolo, come 1.2, in questo caso, dico, seguiterebbe, che essendo (*Fig.* 36.) la *spiral devoluta* QKA*n*E della prima rivoluzione (1) eguale alla periferia $\frac{SHQF}{2}$ del circolo generatore, perciò anche la *spirale conica* (*Fig.* 34.) VFKPQ alla *devoluta* eguale, sarebbe eguale alla semiperiferia SHQ del circolo, che ha per raggio il lato VQ = per la costruzione ad EQ della Fig. 36.

Non altrimenti riflettasi che la porzion devoluta E*n*A (= E*d*B) (*Fig.* 36.) sta a tutta la *spiral devoluta* E*n*AKQ (2), come 1.4 quadrati dei raggi EA (= EB), EQ. Ma la spirale intiera E*n*AKQ = circonferenza $\frac{SHQF}{2}$, ovvero = $\frac{4}{8}$ di detta circonferenza; e però la porzion devoluta E*n*A (giacchè $4.1 :: \frac{4}{8} . \frac{1}{8}$) sarà = $\frac{1}{8}$ di detta

(1) Nota alla pag. 32. n. 1.
(2) Nota suddetta, n. 4.

ta circonferenza. Dunque la porzion devoluta

EnA. ſpirale intiera $EnAKQ :: \frac{1}{8} . \frac{4}{8} :: 1.4$.

Ma ſi conſideri che EnA (*Fig.* 36.) è = alla *ſpirale conica* di prima rivoluzione VFK (*Fig.* 34.) e che $EnAKQ$ è = alla *ſpirale conica* VFKPQ di ſeconda rivoluzione. Dunque *ſpirale conica* di prima rivoluzione VFK. *ſpirale conica* di ſeconda rivoluzione VFKPQ :: 1.4. E così ſe foſſero (principiando ſempre dall' apice V) più *ſpirali coniche* ancora, proverei che ſono nella proporzione de' numeri quadrati 1.4.9.16. ec. appunto come ſuppongo che occorra (1) nelle ſpirali piane.

Seguita dunque ancora che la ſpiral conica di prima rivoluzione VFK; la ſeconda VFKPQ — VFK; la terza — la ſeconda ec. ſieno come i numeri 1.4 — 1.9 — 4.16 — 9 ec. ovvero come 1.3.5.7. ec. così pure come abbiamo ſuppoſto (2) che avvenga nelle ſpirali piane.

Lo ſteſſo procederebbe per le ſpirali incomplete, ſenza che ſu queſto propoſito mi trattenga di vantaggio.

Chiudo finalmente queſto Articolo col manifeſtare la fallacia delle miſure delle ſpirali prodotte dal Wallis, e da me riferite nella nota alla pag. 32. e ciò per mezzo della ſeguente Propoſizione falſiſſima, ma ſul fondamento delle medeſime rettamente dimoſtrata.

PRO-

(1) Nota alla pag. 32. n. 2.
(2) Nota ſuddetta, n. 3.

Digitized by Google

PROPOSIZIONE V.

Una ſpiral conica projetta ſul piano dell' orizzonte, o ſia nella baſe del cono, è eguale alla ſpirale projetta in detto piano.

COSTRUZIONE.

Dal cono G V Q (*Fig.* 34.) e ſpirale ſegnata ſu la ſua ſuperficie ſi calino le perpendiculari V C, K *a*, Q *b* ec. e per mezzo di eſſe deſcrivaſi la *ſpirale di projezione* (*Fig.* 35.) C *e r a o b*, dico che queſta ſpirale è = alla ſpiral conica V F K P Q.

DIMOSTRAZIONE.

Poichè nella formazione di detta *ſpirale di projezione* C *e r* ec. (*Fig.* 35.) occorrono due rivoluzioni del raggio generatore C *b*, eſſa ſarà (1) = a 2 ſemiperiferie, cioè a tutta la periferia *p b* del circolo di ſeconda rivoluzione. Ora il raggio C *b* = (*Fig.* 34.) R Q = $\frac{V Q}{2}$, ovvero (*Fig.* 36.) = $\frac{E Q}{2}$. Ed eſſendo le periferie come i diametri, la periferia del circolo *p b* ſarà = alla periferia $\frac{S F Q H}{2}$, cioè = alla ſemiperiferia S H Q. Ma la ſemi-

(1) Nota alla pag. 32. n. 1.

ſemiperiferia SHQ = (1) alla ſpiral devoluta QKA *n* E. Dunque la *ſpirale di projezione* è = alla *ſpiral devoluta*. Ed eſſendo poi la ſpiral devoluta = per l' antecedente alla *ſpiral conica*, riſulta per fine che la *ſpiral di projezione* C *e r* ec. ſia = alla *conica* V F K P Q. Il che era ec.

COROLLARIO.

Egli è già falſiſſimo che la *ſpiral di projezione* ſia eguale alla *ſpiral conica*; ma per dare all' aſſurdo maggior riſalto, rimarco che nella Fig. 34. il lato VQ del cono trovaſi per la coſtruzione al raggio della ſua baſe RQ, come 2 . 1. Figuriamoci ora che reſtando ferma la baſe conica con detto raggio RQ = 1, il ſolo lato VQ, allungandoſi dalla parte dell'apice V, diventi eguale a qualunque altro numero 4, 5, 6, ec. Tutte le ſpirali ſimili (di due ſpire nel caſo della figura) ſegnate ſopra detti coni di differente lato, projette nel piano dell' orizzonte traccierebbero la medeſima ſpirale di projezione, e ſarebbero tutte alla medeſima, e fra di eſſe eguali. Imperocchè tutte le diverſe corriſpondenti *ſpirali devolute* (che riuſcirebbero incomplete (2), perchè occupanti due ſoli ſettori, cioè $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{6}$ ec. del circolo deſcritto col raggio = al lato di detti coni) ſarebbero fra eſſe eguali, mentre occupando, nello ſvilupparſi, due ſettori, ſarebbe-

(1) Nota alla pag. 32. n. 1.
(2) Propoſ. IV. Coroll. I. di queſto Artic.

Digitized by Google

rebbero eguali alla metà dell' arco di due ſettori, cioè all' arco di un ſettore, dico $= \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ ec. Ma queſto arco non ſi muterebbe mai, perchè ſempre dovrebbe pareggiare la periferia della baſe conica, e per conſeguenza ſarebbe pur ſempre eguale al maſſimo circolo *p b* della *ſpiral di projezione*, e per conſeguenza a detta *ſpiral di projezione* ſempre eguale. Dunque tutte le ſpirali coniche ſimili, andaſſe pur anche l' apice del cono all' infinito, ſarebbero eguali ad una quantità coſtante, cioè alla ſpirale di projezione che è ſempre la ſteſſa. L' aſſurdo non può eſſer più enorme.

ARTICOLO II.

Valore degli ſpazj ſpirali chiuſi fra gli avvolgimenti di una ſpirale conica.

Moſtreremo che queſti ſpazj procedono nella medeſima proporzione degli ſpazj ſpirali piani, e tanto più volontieri, quanto che il valore di queſti ſpazj è aſſai più geometrico, come abbiamo accennato nella nota alla pag. 32.

PROPOSIZIONE I.

Lo ſpazio ſpiral conico (*Fig.* 34.) chiuſo fra la prima ſpira VFK ſta alla ſuperficie conica terminata dal circolo deſcritto col lato di prima rivoluzione

zione VK, come 1.3, appunto come occorre nelle ſpirali piane.

DIMOSTRAZIONE.

Lo ſpazio ſpiral piano E*n*AKQ (*Fig.* 36.) ſta allo ſpazio ſpirale E*n*A = E*d*B, come 8.1, cubi dei raggi EQ = 2, EA = 1 per la coſtruzione; ma lo ſpazio E*n*AKQ = $\frac{1}{3}$ circ. EQ. Dunque, poichè 8.1 :: $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{24}$ ſarà lo ſpazio E*n*A = $\frac{1}{24}$ circ. EQ. Ora il circ. EQ ſta al circ. EA, come 4.1 quadrati dei raggi EQ = 2, EA = 1. Dunque per queſt' altra proporzione 4.1 :: $\frac{1}{24}$. $\frac{4}{24}$ = $\frac{1}{6}$, ſarà lo ſpazio ſpirale E*n*A = $\frac{1}{6}$ circ. EA, ovvero = $\frac{2}{6}$ = $\frac{1}{3}$ ſemicircolo EA.

Conſiderate ora che lo ſpazio ſpirale piano E*n*A, ovvero E*d*B, è (Propoſ. IV.) = allo ſpazio conico (*Fig.* 34.) chiuſo fra la prima ſpira VFK, ed il ſemicircolo A*r*B = alla ſuperficie conica terminata dal circolo deſcritto col lato di prima rivoluzione VK. Dunque lo ſpazio ſpiral conico chiuſo fra la prima ſpira VFK ſta alla ſuperficie conica ec. come 1.3. Il che era da dimoſtrare.

COROLLARIO I.

Lo ſpazio ſpiral piano (*Fig.* 36.) E*n*AKQ — E*n*A ſarà

sarà $= \frac{8}{24} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$ circ. EQ. Ma detto spazio spiral piano EnAKQ — EnA = (Propos. IV.) a tutto lo spazio spiral conico di seconda rivoluzione VFKPQ (*Fig.* 34.). Dunque tutto lo spazio conico VFKPQ $= \frac{7}{24}$. Lo spazio poi spiral conico VFK = EnA = EdB $= \frac{1}{24}$, come sopra. Dunque lo spazio spiral conico di prima rivoluzione sta a tutto lo spazio spiral conico di seconda rivoluzione, come 1.7. E così le più rivoluzioni fossero, mostrerei che detti spazj conici, principiando sempre dal vertice, sono come 1.7. 19. 37. ec. appunto quali sono gli spazj spirali piani marcati alla nota della pag. 32. n. 10.

COROLLARIO II.

Lo spazio spirale piano (*Figura* 36.) AKQA (= EnAKQ — EnA) $= \frac{7}{24}$ come sopra, e lo spazio spiral piano EdB (= EnA) $= \frac{1}{24}$, valore già ritrovato. Dunque lo spazio spiral piano AKQA — EdB $= \frac{7}{24} - \frac{1}{24} = \frac{6}{24}$. Dunque EdB . AKQA — EdB :: $\frac{1}{24} \cdot \frac{6}{24}$ :: 1.6.

Digitized by Google

Conſiderate ora che lo ſpazio ſpiral piano E*d*B è = allo ſpazio ſpiral conico di prima rivoluzione (*Fig.* 34.) VFK; e che lo ſpazio ſpiral piano AKQA — E*d*B è = allo ſpazio ſpiral conico VFKPQ — VFK. Dunque lo ſpazio ſpiral conico VFK. VFKPQ — VFK :: 1. 6. E così moſtrerei che gli ſpazj ſpirali conici dal vertice al primo circolo di rivoluzione; dal primo circolo al ſecondo; dal ſecondo al terzo ec. ſono come li numeri 1. 6. 12. 18 ec. quali appunto ſtanno ſimili ſpazj ſpirali piani ſegnati nella nota citata n. 11.

E' ſoverchio diviſare ogni altra proporzione per gli ſpazj incompleti, i quali già procedono con la medeſima legge degli ſpazj piani incompleti.

PROPOSIZIONE II.

Lo ſpazio chiuſo fra la *ſpirale conica* (*Fig.* 34.) VFKPQ, e lato VQ, è al piano terminato (*Fig.* 35.) della *ſpiral di projezione* C*era*o*b*, e raggio C*b*, come la ſuperficie del cono a quella della ſua baſe.

DIMOSTRAZIONE.

Lo ſpazio C*era* (*Fig.* 35.) chiuſo nella *ſpirale di projezione* di prima rivoluzione e raggio C*a* è = $\frac{1}{3}$ circ. C*a*; e perchè, eſſendo li raggi C*a*. C*b* :: 1. 2. riſultano li circoli *q a*. *p b* :: 1. 4, perciò lo ſpazio C*era*

$Cera = \frac{1}{12}$ circ. pb. Ora ſpazio $Cera.Ceraob :: 1.7$ (1). Dunque perchè $1.7 :: \frac{1}{12} . \frac{7}{12}$, ſegue lo ſpazio ſpirale $Ceraob = \frac{7}{12}$ circ. pb baſe del cono.

Perchè poi il circolo pb (*Fig.* 35.). circolo SHQF (*Fig.* 36.) :: 1.4, quadrati dei raggi loro 1.2; quindi lo ſpazio $Ceraob$ riſulta $= \frac{7}{48}$ circolo SHQF. Ma abbiamo moſtrato nell' antecedente che lo ſpazio ſpiral conico intercetto fra la *ſpirale conica* VFKPQ, e lato VQ è $= \frac{7}{24}$, ovvero $\frac{14}{48}$ circ. SHQF. Dunque detto ſpazio ſpiral conico ſta a detto ſpazio ſpiral orizzontale della baſe conica, come $\frac{14}{48}$ a $\frac{7}{48}$, come 14.7, come 2.1. Ora la ſuperficie del cono ſta a quella della ſua baſe (2) come il lato VQ (*Fig.* 34.) al raggio RQ della ſua baſe; e per la coſtruzione VQ.RQ :: 2.1. Dunque lo ſpazio chiuſo fra la ſpiral conica ec. Il che era da dimoſtrare.

(1) Nota alla pag. 32. n. 10.
(2) Propoſ. III. Artic. I. di queſto Tratten.

Digitized by Google

ANNOTAZIONE.

Militerebbe un ſimil diſcorſo nel caſo d' altri coni, nei quali foſſero VQ, RQ in qualunque altra ragione di numero a numero, e potrei ſempre diſtendere la propoſizione anche agli altri ſpazj, e provare del pari, che lo ſpazio ſpirale conico di prima rivoluzione ſta allo ſpazio di prima rivoluzione della baſe conica, come VQ. RQ; e così pure lo ſpazio conico di ſeconda rivoluzione — lo ſpazio di prima rivoluzione ſta allo ſpazio piano della baſe di ſeconda rivoluzione — quello della prima rivoluzione, come VQ. RQ. ec.

ARTICOLO III.

Valore di un piano ravvolto a ſpirale intorno a un cono.

FIguriamoci (*Fig.* 34.) che ſu le traccie della ſpiral conica VFKPQ ſi attortigli intorno al cono un piano elevato, quale vien rappreſentato dalla Fig. 39. di una larghezza coſtante = *mn*, e che ſia propoſto d' indagare il ſuo valore.

Conſidero queſto piano come generato dalla fluſſione di una retta *mn*, la quale conſervandoſi ſempre parallela alla baſe del cono ſi muova equabilmente pel ſuo lato VG, mentre detto lato equabilmente gira intorno all' aſſe VR. Dalla geneſi di queſto piano ſpicca da ſe il metodo più naturale di rilevare il ſuo valore, cioè devolvendo nel

pia-

piano orizzontale la *via di rotazione*, o *ſpiral media* H*ego* ec. perchè poi il prodotto di *mn* in detta *media ſpiral devoluta*, calcolata come nella nota alla pagina 32. ſarebbe il valore propoſto. Ma dacchè abbiamo dimoſtrato che la miſura delle ſpirali, introdotta nell' importare delle quantità, manca troppo della dovuta eſattezza; perciò mi corſe in animo un altro ſubito ſpediente di pervenire allo ſteſſo ſcopo per via degli ſpazj, come troviamo eſpreſſo nella ſeguente

PROPOSIZIONE.

Condotte (*Fig.* 39.) VG, VH parallele ai lati del cono, e dividenti la retta generatrice *mn* per metà. Dico che il piano elevato è eguale allo ſpazio ſpiral piano, o zona chiuſa (*Fig.* 42.) fra due ſpirali: una V*d*GQ deſcritta col raggio $VH+\frac{mn}{2}$, ed un' altra ſpirale V*tu*A deſcritta con detta $VH-\frac{mn}{2}$.

DIMOSTRAZIONE.

Abbandonato il cono reale (*Fig.* 39.) ſu cui ſi attortiglia detto piano come ſe non vi foſſe, per le parallele VG, VH condotte, come ſopra, noi ci fingiamo un altro cono ſimile immaginario GVH, ſul quale ſi ravvolga la ſpiral media H*ego* ec. che divi-

divide per mezzo detta retta generatrice mn e detto piano per tutto il corso di sua lunghezza. Per quanto fu poi esposto altrove (1) in proposito delle corone, comprendiamo che questo piano la di cui larghezza mn è orizzontale, sarebbe eguale ad una *zona spiral conica* (*Fig.* 40.) che fosse della stessa larghezza $Gu = mn$, e della medesima lunghezza media $Hego$ ec. Descrivasi dunque sopra un cono simile ed eguale al cono immaginario suddetto GVH questa *zona spiral conica*, segnando Vo della Fig. 40. $= Vo$ della Fig. 39; $Vg = Vg$; $Ve = Ve$ ec. e facendo che detta zona conservi per tutto il suo cammino l'istessa larghezza $Gu = mn$.

Ormai si spinga questo cono a rotolare in un circolo (*Fig.* 42.) di raggi $VQ = VH + \frac{mn}{2}$. Così per la quarta del primo Articolo si devolverà e spiegherà questa zona in piano chiusa fra due spirali; una $VdGQ$ descritta col raggio $VH + \frac{mn}{2}$, l'altra $Vsu A$ descritta col raggio $VH - \frac{mn}{2}$, cioè coi raggi VQ, VA. Ma queste spirali piane sono (per la quarta suddetta) eguali alle coniche della Fig. 40. e così pure la zona alla zona (per la medesima). Dunque il piano elevato è eguale ec. Il che era ec.

An-

(1) Tratten. I. Propos. I. Coroll. II.

ANNOTAZIONE I.

Il piano ſpirale verticale della Fig. 41. per il principio ſuddetto eſpoſto nel ſopraccitato luogo, rieſce pure eguale agli altri due delle Fig. 39. 40. e però ſi può ridurre alla Fig. 42. e determinare il valore di tutti tre per mezzo della zona ſpirale orizzontale ivi deſcritta, calcolandola nel modo eſpoſto nel Trattenimento antecedente. Ma ſiccome (*Fig.* 39.) il piano elevato rimane tronco verſo al vertice V, ne continua ivi a produrſi in *finimento*; perciò avraſſi cura di recidere da detta zona (*Fig.* 42.) verſo al centro tutta quella porzione, che foſſe relativa a quella che manca anche nel piano elevato.

ANNOTAZIONE II.

Quantunque abbiaſi finto di delineare la zona della Fig. 40. e di far rotolare ſul piano dell' orizzonte il cono immaginario GVH (*Fig.* 40.) dopo averlo tracciato della zona che lo circonda, per conſeguire una zona devoluta in piano (*Fig.* 42.) = a quella della Fig. 40. non oſtante penſo che niuno crederebbe che in pratica foſſe d' uopo di tali operazioni, avviſando che ſieno da me ſoltanto introdotte per tornarci in mente quelle propoſizioni, dalle quali pare che dovrebbe dipendere la miſura propoſta; quindi baſta ſegnare nella Fig. 42. ſul raggio generatore le diſtanze V*o*, V*g*, V*e* ec. eguali alle diſtanze relative V*o*, V*g*, V*e* ec. della Fig. 39. preſe ſul lato che ruota intorno all' aſſe,

per

per delineare la *ſpirale media* V*o*g*e*H, e deſcrivere poi le altre due ſpirali da detta *media* diſtanti un rombo proporzionale allo ſpazio $= \frac{mn}{2}$. Ma io m' annojo a diviſare per lungo ogni minuzia, benchè foſſe pur anche ben fatto, e abbiaſi, ſe ſi vuole, queſta propoſizione, come un' idea ancora indigeſta, che da più lunghe meditazioni attenda raffinamento e preciſione.

TRAT-

Digitized by Google

TRATTENIMENTO IV.

Di Catottrica, e Diottrica.

DAcchè tanti grand' uomini (1) fino dai più rimoti ſecoli hanno penſato e ſcritto di Catottrica, e Diottrica, parmi difficile, nè potrei ſenza ribrezzo aſſerire di produrre io qualche novità; molto più che intorno alla prima favello della ſola rifleſſione in diverſi piani, e nell' altra ad un ſolo Problema mi riſtringo. Ma pure egli non è impoſſibile, e tanto meno perchè ſo di certo di non avere veduto prima ciò che eſpongo, in altri Autori. Dunque ſenz' altro indugio da una piacevole luſinga animati proſeguiamo il noſtro aſſunto.

ARTICOLO I.

Della rifleſſione che ha principio e fine:

TRovare i punti di rifleſſione in diverſi piani dati di poſizione di un corpo elaſtico che da un punto paſſa ad un'altro punto dato, è uno dei principali problemi di Catottrica coſtrutto da diverſi diverſamente, ed in particolare dal Tacquet (2) con ſomma eleganza. La mia coſtruzione non è

(1) Tolommeo. Euclide. Alhaſeno. ec.
(2) Catop. l. 2. p. 22.

Digitized by Google

molto differente dalla ſua, benchè non l'aveſſi mai veduta, ma ha alcuni ſpeciali vantaggi che indicherò a ſuo luogo, e ſono: primo, che queſta mia coſtruzione ammette in certi caſi doppia ſoluzione; l'ammetterebbe anche quella dal Tacquet, ma egli non l'ha indicato: ſecondo, riuſcendo nella mia le figure più raccolte, perciò occupano minor ſpazio; imperocchè nella coſtruzione del Tacquet qualche volta non che un foglio di carta, ma tutto il tavolino di un geometra non baſta. Se qualche volta non baſta nemmen nella mia, inſegno il modo di raccorciarla: veniamo al fatto.

PROPOSIZIONE I.

Dato il punto radiante D (*Fig.* 51.) d' onde un raggio parte per paſſare al dato punto F dopo un numero di rifleſſioni n (in figura $= 5$) determinare nei piani riflettenti di poſizione dati, detti punti di rifleſſione (x, u, t, z, y).

COSTRUZIONE.

Primo. A ciaſcun piano prodotto, ſe biſogna, ſi menino tante perpendicolari altrettanto di là dal piano prodotte, quanti ſono i punti di rifleſſione occorrenti in ciaſcun piano; cominciando quindi dal punto D con una perpendicolare DL prodotta altrettanto di là dal piano Qq fino in A; e da A menando la perpendicolare AB altrettanto di là dal piano PQ prodotta fino in M; e quinci cominciando dal punto F con una perpendicolare FC altret-

trettanto prodotta di là dal piano Qq fino in H, e da H la perpendicolare HG altrettanto di là dal piano pq prodotta fino in E, e da E la perpendicolare EK altrettanto di là dal piano Pp prodotta fino in m.

Secondo. Come prima le perpendicolari emanate dai punti D ed F pareggiano il dato numero delle riflessioni $n(=5)$ si uniscano le estremità delle due ultime AM emanata da D, Em emanata da F con una *trasversale* mM; e dai punti d'intersezione u, t si menino le rette uA, tE alle penultime perpendicolari DA, HE; così dai punti d'intersecazione x, z altre rette ad altre antipenultime perpendicolari, se più fossero, come zH; onde condotta per fine xD da x, e yF da y, dico che i punti x, u, t, z, y ec. saranno i ricercati.

DIMOSTRAZIONE.

L'angolo uxQ = angolo al vertice opposto AxL; e l'angolo AxL = angolo DxL, perchè per la costruzione le loro basi AL, LD sono eguali, e comune l'altezza Lx. Dunque uxQ = DxL, ed il punto x quale si ricercava. Così dimostrerei che tali sono anche gli altri punti. Dunque tutti i punti x, u, t, z, y sono ec.

ANNOTAZIONE I.

Se alla perpendicolare DA fosse stata applicata, in vece della AM al di sopra, piuttosto (*Fig.* 52.) la AE al di sotto; e lo stesso si fosse per contrario operato rispetto alla perpendicolare FH; cioè

(*Fig.* 52.) tirando H M al di ſopra, piuttoſto che (*Fig.* 51.) H E al di ſotto, il raggio ſarebbe paſſato in F per altra via; ed ecco perciò che dati di poſizione i medeſimi piani, ed il medeſimo principio e fine D, F *della via di rifleſſione*, ed il medeſimo numero di punti di rifleſſione dato, poſſiamo conſeguire due diverſe *vie di rifleſſione*, e quindi apprendiamo che il medeſimo problema è così capace, come accennai, di un doppio ſcioglimento.

ANNOTAZIONE II.

La traſverſale mM (*Fig.* 51.) è = alla *via di rifleſſione*; imperocchè uM = uA per la coſtruzione; uA = $ux + x$A; ma xA = xD. Dunque uM = $ux + x$D, cui aggiunta tu, ſarà tM = $tu + ux + x$D. Dall' altra parte eſſendo zH = $zy + y$H, e (perchè yH = yF) = $zy + y$F, e per eſſere zE = zH, viene zE = $zy + y$F, cui aggiunta tz, riſulta tE = $tz + zy + y$F; ma tE = tm per la coſtruzione. Dunque $tm = tz + zy + y$F; e quindi per fine $mt + t$M = $tz + zy + y$F + $tu + ux + x$D, cioè mM = alla *via di rifleſſione* D$xutzy$F.

ANNOTAZIONE III.

Nella belliſſima coſtruzione del Tacquet la *via di rifleſſione* mM principiando da F nella direzione Fy ſi ſpicca fuori della figura tanto, quanto mM è più lunga di Fy fino in O, e per conſeguenza molto più che nella mia.

An-

Digitized by Google

ANNOTAZIONE IV.

Se la traſverſale *m*M non taglia i piani rifletten-ti, il Problema è impoſſibile .

PROPOSIZIONE II.

Segnate due parallele PF, MK (*Fig.* 43.) di po-ſizione , ſuppongaſi che due altre rette , o regoletti traſverſali PQ, FM ſi muovano con un' eſtremità intorno ai punti P , F fiſſi nella parallela PF, in-tanto che le altre due eſtremità Q, M vengono condotte lungo l' altra parallela MK, coſicchè con-ſervino ſu la medeſima fra eſſe una diſtanza co-ſtante MQ=QD=*e*K ec.

Dico ora che il punto d' interſecazione $\varkappa$, ovve-ro *g* , ovvero G ec. di dette rette o regoli traſverſa-li , trovaſi coſtantemente in una retta $\varkappa$G parallela a quelle di poſizione PF, MK .

DIMOSTRAZIONE.

Suppongaſi che in principio di moto il rego-letto PQ foſſe per eſempio normale alle due ſud-dette parallele PF, MK, e in qualunque caſo eſ-ſendo ſimili li triangoli P$\varkappa$F , Q$\varkappa$M , averemo PF. QM :: P$\varkappa$. Q$\varkappa$ altezze di detti triangoli, e componendo PF + QM. QM :: P$\varkappa$ + Q$\varkappa$. Q$\varkappa$; e perciò così ſtabilita la ſituazione del punto $\varkappa$.

Suppoſto pertanto che detti regoli abbiano acqui-ſtata la ſituazione PK, F*e*, le baſi PF, K*e* dei triangoli PGF, K*Ge* ſono per la coſtruzione egua-

li

li alle basi dei primi, e la somma della loro altezza $aG+Gb$ sarà, perchè per la costruzione PF, MK sono parallele, sarà, dissi, $=P\varkappa+Q\varkappa$ somma pure delle altezze dei primi triangoli $P\varkappa F$, $Q\varkappa M$. Quindi nella suddetta proporzione sostituendo $aG+bG$ a $P\varkappa+Q\varkappa$, risulta $PF+QM.QM::aG+bG.bG$: ma $PF+QM.QM::P\varkappa+Q\varkappa.Q\varkappa$, come sopra. Dunque $P\varkappa+Q\varkappa.Q\varkappa::aG+bG.bG$, e alternando $P\varkappa+Q\varkappa.aG+bG::Q\varkappa.bG$. Ora sono, come sopra, $P\varkappa+Q\varkappa=aG+bG$. Dunque $Q\varkappa=bG$, e per conseguenza i punti G ed $\varkappa$ si trovano nella medesima retta $\varkappa G$; come era ec.

PROPOSIZIONE III.

Dati i soliti punti D ed F, trovare il punto $\varkappa$ senza costruire la figura di là dal piano riflettente verso M (*Fig.* 44.)

COSTRUZIONE.

Calate le perpendicolari DQ, FP al dato piano PQ, si menino le trasversali FQ, PD, e dal punto d' intersecazione g si ecciti una parallela $g\varkappa$ alla perpendicolare DQ, ovvero FP, dico che $\varkappa$ è il punto ricercato.

DIMOSTRAZIONE.

Facendo $DQ=QM$, e tirando FM, il punto $\varkappa$ è il punto di riflessione per la prima, ed i punti $\varkappa$, g si trovano nella medesima retta $g\varkappa$ per la seconda. Dunque ec.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSIZIONE IV.

Dato finalmente che fosse inaccessibile anche il piano PQ, ma che per la trigonometria fosse rilevata la lunghezza delle perpendicolari QD, PF (*Fig.* 45.) ed eseguendo la costruzione sopra quella sola porzione di esse che fosse accessibile, cioè sopra $\frac{QD}{n}$ (= per esempio $qD = \frac{QD}{3}$), e sopra $\frac{PF}{n}$ ($= pF = \frac{PF}{3}$) menando come sopra le trasversali pD, Fq, e dal punto d'intersecazione G calando la $G\varkappa$ parallela alla perpendicolare DQ, ovvero FP; o piuttosto, giacchè si suppone il piano inaccessibile, tirando con una diottra un raggio visuale $G\varkappa$ parallelo a dette perpendicolari, dico che il punto $\varkappa$, che si fisserà a qualche segno del piano PQ, sarà il ricercato.

DIMOSTRAZIONE.

Nel supposto degli angoli di riflessione eguali, gli triangoli $QD\varkappa$, $PF\varkappa$ dovendo esser simili, abbiamo $QD . Q\varkappa :: PF . P\varkappa$, alternando $QD . PF :: Q\varkappa . P\varkappa$. Componendo $QD + PF . PF :: Q\varkappa + P\varkappa . P\varkappa$. Onde così risulta stabilito il punto $\varkappa$.

Essendo poi per la geometria $QD . PF :: \frac{QD}{n} . \frac{PF}{n}$

verrà

verrà $\frac{QD}{n} . \frac{PF}{\varkappa} :: Q\varkappa . P\varkappa$; cioè $qD(=\frac{QD}{n}).pF(=\frac{PF}{n}) .: Q\varkappa . P\varkappa$. Componendo $qD+pF . pF :: Q\varkappa+P\varkappa . P\varkappa$. e così non altrimenti determinato il medesimo punto $\varkappa$.

Intanto menata $a\,y$ per il punto d' intersecazione G parallela al piano PQ, per la similitudine de' triangoli yGq, aGF , abbiamo pur anche $qy . yG :: Fa . aG$; e levando via dai primi termini le due porzioni proporzionali Dy , pa, perchè lati omologhi dei due triangoli simili DyG, paG, viene $qD . yG :: pF . aG$, alternando $qD . pF :: yG . aG$. Componendo $qD+pF . pF :: yG+aG . aG$; e quindi così fissato il punto G , come di sopra il punto $\varkappa$. Ma $a\,y = PQ$, perchè parallele fra due altre parallele QD , PF . Dunque parimenti $aG = P\varkappa$; e però tirata $G\varkappa$ con una diottra parallela a DQ , o sia normale ad $a\,y$, questa marcherà sul piano opposto PQ il punto $\varkappa$, quale era proposto .

ANNOTAZIONE I.

Giungeremo bentosto a vedere come l' intersecazione delle trasversali che ebbe luogo in queste due propozioni leggiadramente intervenga ancora nella costruzione , sempre che i piani riflettenti regolarmente o irregolarmente sieno disposti nella periferia di un circolo .

An-

Digitized by Google

ANNOTAZIONE II.

Da queſta propoſizione ſi potrebbe forſe dedurre una qualche pratica che foſſe utile nella guerra per diſturbare con alcuni tiri rifleſſi un qualche corpo di truppa, che ſi credeſſe ſicura dietro ad un riparo, o per danneggiare per di dietro qualche opera, a cui di fronte l' artiglieria non poteſſe così toſto eſſer moleſta.

PROPOSIZIONE V.

Dati due piani di poſizione paralleli PQ, *pq* (*Fig.* 46.) determinare quanti punti di rifleſſione ſi vuole.

COSTRUZIONE.

Primo. Il numero dei punti dati può eſſere o diſpari o pari. Nel primo caſo devo oſſervare: primo, che il 2 e 3 per eſempio ſono le due parti più proſſime alla metà del 5; il 3 e 4 alla metà del 7; il 4 e 5 alla metà del 9 ec. ſecondo oſſervo che, eſſendo il numero diſpari per eſempio 5, accaderebbero due rifleſſioni in un piano e 3 nell' altro, numeri corriſpondenti alle due parti più proſſime alla metà del 5; così per il 7 ne occorrerebbero 3 nell' uno e 4 nell' altro; per il 9, 4 nell' uno e nell' altro 5 ec. Ciò preſuppoſto a quel piano PQ (*Fig.* 46.) in cui deve occorrere un maggior numero di rifleſſioni (ſarebbero per il 9 come in figura =5) ſi aggiungono tanti piani (diſtanti fra loro come i due

primi PQ, *pq*) che pareggiano detto numero (risultano quattro nel caso della figura). Poi di là dall' ultimo piano H5 prodotta la perpendicolare FP, finchè HM = FH, si tiri MD, ed F5; perchè fatto poi centro in 1 con l' apertura 1,2, cioè dall' 1 fino al 2, si segni *x*; fatto centro in *x* con la medesima apertura si segni *e*; indi col centro in *e* si segni *y* ec. dico che i punti 1, *x*, *e*, *y*, ec. sono li ricercati.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo per la costruzione il piano 2, 8 distante da PQ, quanto PQ dall' altro piano *pq*, ed essendo pure stato preso 1*x* = 1,2, ne viene che i punti *x*, 2 si ritrovino similmente posti sui rispettivi piani *pq*, 2, 8; e quindi gli angoli 21Q, *x*1Q sieno eguali. Ma l' angolo P1F = angolo al vertice opposto 2*i*Q. Dunque P1F = *x*1Q; ed il punto 1 uno de' ricercati; e non altrimenti si procederà per argomentare di tutti gli altri, giacchè la figura parla abbastanza da se. Dunque ec. Il che era ec.

ANNOTAZIONE I.

La *via di riflessione* è eguale alla retta MD. Imperocchè essendo stati presi 1*x*, *xe*, *ey* ec. sempre eguali ad 1, 2; ed essendo per la costruzione 1, 5 = quattro 1, 2, quindi risulta 1,5 = 1*x* + *xe* + *ey* + *yn*, alla qual quantità aggiunta F1, sarà F5 = F1 + 1*x* + *xe* + *ey* + *yn*; e non altrimenti viene D5 = D9 + 9*u* + *um* + *mz* + *zn*, ed F5 + D5 = a tutta la *via di riflessione*. Ma

F5

Digitized by Google

F 5 = 5 M, perchè F H = H M per la costruzione. Dunque M 5 + 5 D, cioè M D = alla *via di riflessione*, come dovevasi dimostrare.

ANNOTAZIONE II.

Questa costruzione è una costruzione raccorciata della seguente, messa così perchè altrimenti avrebbe occupata essa sola tutta la Tavola; per altro è facile col confronto della Fig. 47. ridurla a quella che doveva essere.

Secondo. Nel caso dunque che il dato numero delle riflessioni sia pari (*Fig.* 47.) all' uno o all' altro dei dati piani, per esempio a *p q* si aggiungeranno tanti egualmente distanti piani *g* 1, K 2, ec. quanti bastano per arrivare alla metà del numero dato (cioè per arrivare a 3 metà in figura del numero dato 6). Indi fatta 1 D = 1 G, se il numero dato fosse 4; fatta 2 D = 2 M, se il numero dato è 6. come in figura; fatta 3 D = ec. se il numero dato è 8; fatta 4 D = ec. se il numero dato fosse 10 ec. e sempre in ogni caso prodotta F P, finchè F P = P *m*; si meni la trasversale *m* M che taglierà i dati piani in *e* ed *x*. Ora segnata *q* M = *q* A, si meni *x* A che taglierà P Q in *n*; segnata Q A = Q G, si meni *n* G che taglierà *p q* in *y*; segnata *q* G = *q* H, si meni *y* H che taglierà P Q in *u*; segnata Q H = Q *r*, si meni *u r* che taglierà *p q* in *z*; e finalmente si meni *z* D, *e* F. Dico che i punti *e*, *x*, *n*, *y*, *u*, *z*, ec. sono li ricercati.

DIMOSTRAZIONE.

L' angolo *me* P = *ne x* al vertice opposto; ma

$m\,e\,P = F\,e\,P$, perchè $P\,m = P\,F$. Dunque $F\,e\,P = n\,e\,\varkappa$; ed il punto e uno de' ricercati. L' angolo $p\,\varkappa\,e = q\,\varkappa\,M$ al vertice opposto; ma $q\,\varkappa\,M = q\,\varkappa\,A$, perchè $q\,M = q\,A$ per la costruzione. Dunque $p\,\varkappa\,e = q\,\varkappa\,A$; ed il punto $\varkappa$ un' altro punto di riflessione. E così procedendo negli altri punti, tutti si dimostra che sono quali si ricercavano. Dunque ec.

ANNOTAZIONE.

In una maniera poco men differente da quella praticata nella Fig. 46. si dimostrerebbe in questa Fig. 47. che la *via di riflessione* è eguale alla retta $m\,M$.

PROPOSIZIONE VI.

Dato nel piano DC il punto radiante D (*Fig.* 48.) che deve passare al dato punto F, e da F tornare indietro per la medesima via in D, dopo un dato numero di riflessioni, per esempio 6, nei piani convergenti CK, CD: determinare; primo l' angolo DCK; secondo detti punti di riflessione $a, u, \varkappa, y, z$, F; terzo, una retta eguale alla *via di riflessione*.

COSTRUZIONE.

Eretta la perpendicolare indefinita FM, col centro in C, ed apertura CD, descrivasi l' arco DKM fino all' incontro della perpendicolare; indi diviso l' arco in tante parti, quante sono le riflessioni date (in figura

gura = 6), si tirino altrettanti raggi CK, CH ec. Finalmente condotta al raggio CM un' altra perpendicolare D*f* che tutti taglia detti raggi ; dico, primo, che l' angolo DCK è il proposto; secondo fatta C*b* = C*u*; C*d* = C*x*; C*h* = C*y*; C*e* = C*z*; C*f* = CF, dico che li punti *a*, *u*, *x*, *y*, *z*, F sono li ricercati; terzo, che la retta D*f* è eguale alla via di riflessione.

DIMOSTRAZIONE.

Primo. Primieramente l' angolo DCK essendo fatto = $\frac{DCM}{n}$ (= $\frac{1}{6}$) appare qual deve essere dalla convenienza che ritiene con la natura del Problema, e con la dimostrazione delle cose che or ora espongo. Ciò che è la prima parte.

Secondo. Osserviamo che l' angolo D*a*K = angolo *ba*C al vertice opposto ; ma *ba*C = *ua*C, perchè per la costruzione C*b* = C*u*, e l' angolo DCK = angolo KCH. Dunque D*a*K = *ua*C; ed *a* uno dei punti ricercati.

L' angolo *ab*H = *db*C al vertice opposto ; ma *db*C = *xb*C, perchè C*d* = C*x* per la costruzione; e l' angolo KCH = angolo HCB. Dunque *ab*H = *xb*C. Ora *ab*H = *au*D, ed *xb*C = *xu*C, perchè C*b* = C*u*, e l' angolo DCK = angolo KCH, come sopra, per la costruzione. Dunque *au*D = *xu*C, ed il punto *u* altro punto ritrovato.

L' angolo *bd*B = *hd*C, ed *hd*C = *td*C, perchè *t* ed *h* posti in simili siti. Dunque *bd*B = *td*C.

Ma

Ma $bd\,B = b\varkappa K$, $td\,C = t\varkappa C$, perchè per la costruzione $Cd = C\varkappa$. Dunque $b\varkappa K = t\varkappa C$. Ora $b\varkappa K = y\varkappa C$ al vertice opposto, $t\varkappa C = u\varkappa K$ pure al vertice opposto. Dunque $y\varkappa C = u\varkappa K$, ed $\varkappa$ punto ricercato.

L'angolo $dh\,Q = eh\,C$ al vertice opposto, ed $eh\,C = oh\,C$, perchè e ed o posti in simili siti. Dunque $dh\,Q = oh\,C$. Ma $dh\,Q = \varkappa y\,D$, $oh\,C = zy\,C$, perchè $Cd = C\varkappa$, $Ch = Cy$, $Co = Ce = Cz$. Dunque $\varkappa y\,D = zy\,C$, ed y altro punto che si cercava.

L'angolo $he\,R = fe\,C$ al vertice opposto, ed $fe\,C = se\,C$, perchè f ed s similmente posti. Dunque $he\,R = se\,C$. Ma $he\,R = yz\,K$, $se\,C = F\,z\,C$, perchè $Ch = Cy$, $Ce = Cz$, $Cs = Cf = CF$. Dunque $yz\,K = F\,z\,C$, ed il punto z quale si richiedeva.

Finalmente l'angolo $ef\,M = ef\,C$ retti per la costruzione. Ma $ef\,M = z\,F\,D$, $ef\,C = z\,F\,C$, perchè $Ce = Cz$, $Cf = CF$ per la costruzione. Dunque $z\,F\,D = z\,F\,C$. Perlocchè sono retti. Dunque il punto F, quale appunto si richiedeva, acciocchè rimandi il raggio riflesso per la medesima via, ed i punti a, u, $\varkappa$, y, z, F, quali erano proposti. Il che era l'altra parte.

Terzo. Essendo poi per la costruzione tutti i punti b, u; d, $\varkappa$; h, y; e, z; f, F similmente posti, risultano pure le rette che gli uniscono rispettivamente eguali, cioè $ab = au$, $bd = u\varkappa$, $dh = \varkappa y$, $he = yz$, $ef = zF$, e tutti gli antecedenti $ab + bd + dh + he + ef = a$

tutti

tutti li conſeguenti $au+ux+xy+yz+zF$, ed aggiunta dall' una, e l'altra parte Da, riſulta finalmente $Da+ab+bd+dh+he+ef=Da+au+ux+xy+yz+zF$, cioè Df, ovvero FM che ſono eguali per la coſtruzione, dico $Df=Da+au+ux+xy+yz+zF$ eguale alla *via di rifleſſione*. Il che era l' ultima parte ec.

COROLLARIO I.

Se in vece di eſſer dato il numero delle rifleſſioni, e i punti D, ed F per trovare l' angolo DCK, e i punti di rifleſſione, foſſe piuttoſto dato il numero delle rifleſſioni, e l' angolo, per trovare detti punti di rifleſſione (imperocchè non ſi poſſono dare ad un tratto numero di rifleſſioni, punti D ed F, ed angolo DCK per trovare poi detti punti di rifleſſione) dovrebbeſi col centro in C, ed apertura CD deſcrivere un' arco indefinito, e ſegnati in queſto tanti archi eguali a DK, quante unità conteneſſe il dato numero delle rifleſſioni, calare poi da M eſtremità dell' arco una perpendicolare MF, la quale fiſſerebbe il punto F; nel reſto poi ſi procederebbe come ſopra per trovare i punti di rifleſſione ricercati.

COROLLARIO II.

Quanto più ſi vuole che F rieſca vicino a C, tanto più l' angolo DCK dovrà eſſere acuto, e per conſeguenza tante più rifleſſioni occorreranno, non ſolo perchè diventa più picciolo l' arco DK, ma anche perchè diventa più grande l' arco totale DM.

Co-

Digitized by Google

COROLLARIO III.

Dati i piani DC, KC di qualunque altra differente lunghezza, ma gli archi DK, KM, ſimili, anche il punto F riuſcirebbe nella nuova figura ſimilmente poſto; coſicchè DF, FC della figura coſtrutta ſu' piani differentemente lunghi ſarebbe tuttavia, come DF, FC della Fig. 48.

ANNOTAZIONE.

Conſidero la Fig. 46. 47. come la ſezione di un tubo cilindrico diviſo da un piano per tutto il lungo del ſuo aſſe, e oſſervo che riuſcendo in eſſo gli angoli di rifleſſione ſempre eguali, un così fatto tubo niente può ſervire a tramandare da lontano o la luce o il ſuono; imperocchè quale o quella o queſto eſce dal ſuo primo principio, tale nel tubo ſi mantiene; finchè ſi ſpande fuori con la ſteſſa divergenza primiera, e con tanto maggior diſcapito d'intenſione, quanto maggiore è ſtato il numero delle rifleſſioni nel tubo occorſe.

Conſidero parimenti la Fig. 48. come la ſezione di un tubo conico diviſo pur da un piano come ſopra, e ravviſo in eſſo dei vantaggi reali, tanto ſe la luce, o il ſuono entra da una parte, come dall' altra. Concioſiachè ſe il ſuono, o la luce, è diretta dall' apice C del cono verſo alla baſe, vediamo che i raggi ſi diſpongono di rifleſſione in rifleſſione al paralleliſmo, che è la più vantaggioſa direzione del ſuono, o del lume per diffonderſi a grandi diſtanze. Se o la luce, o il ſuono entra dalla parte più

Digitized by Google

più lata DK, si dispone riflettendo ad unirsi tutta in un punto, che esisterebbe nella metà della retta Fz, rispetto a tutti quei raggi che partissero da un punto simile al punto D, e ciò pur torna a profitto in diversi incontri.

Le trombe parlanti, i corni da caccia appartengono al primo caso, le canne degli astrologhi, o impostori di piazza, le trombettine per i sordi, appartengono al secondo. In conseguenza del secondo Corollario la più vantaggiosa condizione di una tromba parlante, di una canna astrologica, di una trombettina d' orecchio ec. consiste non nella sua lunghezza, come risulta pure dal Corollario terzo, ma nella opportuna situazione del punto F, il quale quanto sarà più vicino al centro C, tante più riflessioni occorrendo, avranno perciò i raggi lucidi o sonori luogo di disporsi nelle trombe al parallelismo, e nelle canne di stringere maggior coppia d' aria o di luce in un sol punto.

L' orecchio di quelli che hanno la pazienza di ascoltar gli astrologhi, o di quelli che sono sordi, bisognerebbe che fosse situato nel punto F, così pure la bocca di chi parla in una tromba, o suona in un corno.

Osservo per fine che a suonare un corno, a parlare in una tromba, o canna, s' impiegherà uno sforzo tanto maggiore, quanto il punto F sarà men distante dal centro C. Imperocchè occorrendo allora molte più riflessioni, maggior coppia d' aria ritardata si ammassa, che col suo elaterio resiste agli impulsi di chi suona, o di chi parla. Tutti questi

lumi potrebbero forse riuscire non inutili a quelli che volessero qualche maggior perfezione aggiungere a simili istromenti. Ma bisognerebbe aver prima raccolto dall' esperienza sotto qual' angolo presso a poco la voce umana fuori della bocca si spanda, e fra quali limiti d' intensione; perchè secondo il più e meno di questi dati riuscendo dapprima il raggio sonoro diversamente inclinato alle pareti del tubo conico, il punto di riflessione F rimane indietro, o viene più innanzi sospinto. Il famoso Tubo d' Alessandro Magno, che udivasi fino a 100 stadj lontano, si (1) pretende che fosse una tromba parlante, composta di due tubi conici, uno piegato su la semiperiferia di un circolo, l' altro su l' altra semiperiferia del medesimo circolo con una sola imboccatura ed uscita comune a tutti due, infilate a dirimpetto nella direzione del diametro, che era lungo cinque palmi. L' accozzare poi in tale ordigno l' elisse con la parabola, fu invenzione de' nostri dì.

Abbiamo veduto finora che un piano ha potuto fornire un sol punto di riflessione, e che due piani paralleli o convergenti sono atti a fornirne quanti si vuole. Due piani poi divergenti o disposti ad angoli retti non ne somministrano più di due; e talvolta pur due soli, secondo la disposizione degli altri dati, costituiscono un caso impossibile, di cui la mia costruzione ne dà indizio, quando la trasversale *m*M non s' interseca con detti piani. Siccome però abbiamo nelle due figure 49. e 50. l' esempio di diver-

(1) *Athanasius Kircher. Phonurgia*, Lib. I. asserisce di aver letto ciò in un libro della Bibliot. Vaticana intitolato: *Secreta Arist. ad Alexandrum Magnum.*

Digitized by Google

diversi punti riflessi in piani convergenti, e divergenti, e nelle due 51. e 52. in piani disposti ad angoli retti, così non mi pare che occorra altro, se non, prima d'andar più innanzi, accennarvi a quali usi in certi casi la riflessione si potesse applicare, nel supposto dei piani disposti ad angoli retti, e non curando diversi giuochi che per mezzo della accennata costruzione si vorrebbero risolvere su la Tavola di un trucco, dei quali in pratica poi non ne riuscirebbe pur uno, crederei piuttosto che dalla situazione di diversi specchj concepita a dovere potremmo riportarne altri più certi vantaggi, dirigendo per esempio d'altronde il lume di una finestra in qualche altro luogo oscuro, dove ad alcuno fosse bisogno, o di scrivere, o di leggere, o d'altra faccenda. Così niente meno in qualche caso riuscirebbe forse opportuno di potere per mezzo di alcuni specchj espiare inosservato da una stanza oscura ciò che si passasse in un'altra chiara, e così manifestarsi la frode di un domestico, la negligenza di uno scolare, gli andamenti di una fanciulla, e che so io. Non è da tacere, benchè a questo sito non convenga, della ingegnosa disposizione di molti specchj piani (1) applicata con felice successo a raccogliere tanti raggi in un sol punto che alla distanza di piedi 200 vaglia ad accendervi il fuoco. Ad altri usi ancora sono applicati gli specchj piani e nella Camera ottica e in altre curiose invenzioni, che non è mia intenzione di volere tutte annoverare.

Ripiglierò pertanto il filo delle mie osservazioni

(1) *Mem. de l'Academ.* 1747.

ſu le figure che ſeguitano, e prima nella Fig. 53. non trovo altro di rimarcabile, ſe non che eſſendo in eſſa il principio e fine della via di rifleſſione nel ſolo punto D ſituato nell' area di un rettangolo, la figura vien coſtrutta ſopra una ſola perpendicolare iniziale DH. Nella figura 54. ſvanita ogni perpendicolare iniziale, la via di rifleſſione principia e termina in un punto preſo in uno dei piani dati di poſizione. Quivi è pur oſſervabile che il rettangolo $xDzy$ è iſoperimetro con qualunque altro inſcritto, come eſſo, nel rettangolo eſterno PQpq, quando gli angoli di rifleſſione ſieno eguali, al che ſi può applicare la coſtruzione e dimoſtrazione della Propoſizione V. Articolo II.

PROPOSIZIONE VII.

Dato il punto D (*Fig.* 55.) d' onde un corpo elaſtico parte, ed il punto F, cui arriva dopo un dato numero di giri intorno ad un rettangolo dato, determinare quali e quanti punti di rifleſſione occorrano.

COSTRUZIONE.

Diverſi caſi abbraccia il Problema propoſto; concioſiachè li punti D ed F poſſono eſiſtere, o tutti due in un medeſimo lato del rettangolo dato, come nella Fig. 55. o tutti due nell' area di detto rettangolo, come nella Fig. 56. o uno nell' area, e l' altro nel lato; o uno in un lato, e l' altro in un altro. Ma laſciando per brevità da parte gli ultimi due,

o

due, recherò de' primi due una nuova costruzione, non perchè la costruzione generale del primo Problema non basti, ma per fare che la figura non esca fuori del foglio, inconveniente già altrove indicato, ed a cui conviene, potendo, occorrere con qualche ripiego. Cominciamo dalla Fig. 55.

Sia dunque come in essa, li dati punti D ed F esistenti nel lato Qq del rettangolo dato, e sia proposto che il corpo elastico partito da D non pervenga in F, se non dopo un numero n di giri compiti (per esempio $=3$).

Dividasi perciò lo spazio DF in parti eguali a n, sieno per esempio 3, DH, HG, GF, cioè per il dato numero de' giri. Indi per di sotto facciasi $Dq=qd$, $dC=CIII$; $Hq=qh$, $hb=bII$; $Gq=qg$, $ga=aI$. E per di sopra $FQ=Qf$; $GQ=Qg$; $HQ=Qb$. Poi si tirino le rette $IIIb$, IIg, If. Poscia dai punti d'intersecazione 3, 2, 1, si menino per di sotto le rette $3d$, $2b$, $1g$; e così parimenti dagli altri punti d'intersecazione quelle altre rette che mettono capo nei quattro primi punti D, H, G, F, come in figura. Ora dico che gli undici punti di riflessione che in essa si scorgono, sono li ricercati. La dimostrazione è quella medesima del primo Problema, nè occorre ripeterla.

ANNOTAZIONE.

Intanto è da notare che il numero dei punti di riflessione è sempre eguale al numero dei piani $=4$ moltiplicato per il numero de' giri $n(=3)$ meno 1.

Cioè

Cioè nel caso della figura $= \overline{4 \times 3} - 1 = 11$. Stando dunque fermo il numero 4 dei lati del rettangolo, secondo che il numero de' giri sarà 2, 3, 4, ec. i punti di riflessione risulteranno crescenti in progressione aritmetica per 4; dico che detto numero dei punti di riflessione sarà crescente così:

$= \overline{4 \times 2} - 1 = 7$, $= \overline{4 \times 3} - 1 = 11$, $\overline{4 \times 4} - 1 = 15$ ec.

Rimane finalmente da risolvere il caso espresso nella figura 56. Ivi li punti D ed F esistono nell'area di un rettangolo dato, e si vuole che il corpo elastico D non giunga in F, se non dopo per esempio 2 giri; perciò fia d' uopo determinare prima i punti G, ed A, ed H.

Dovendo cominciare dal punto H perchè serve a scoprire gli altri due, osservo che la costruzione della figura esigge che li triangoli $\varkappa QH$, uqH sieno simili fra loro, e parimenti simili a' triangoli $De A$, $Ft G$;

quindi abbiamo $\begin{cases} De.Ft :: eA.tG. \\ \varkappa Q.uq :: QH.qH. \end{cases}$

ma le altezze alle altezze sono nella medesima ragione, sono dico $eA.tG :: QH.qH$.

Dunque $\left.\begin{matrix} De.Ft \\ \varkappa Q.uq \end{matrix}\right) :: QH.qH$.

lasciando pertanto li termini $\varkappa Q$, uq da parte, come inutili, perchè ignoti, e componendo gli altri, risulta $De + Ft.Ft :: QH + qH.qH$; e perciò

$\frac{Ft \times \overline{QH + qH}}{De + Ft} = qH$, nella quale equazione essendo

do note tutte le quantità del primo membro, perciò vien noto anche il secondo qH, ed il punto H così determinato.

Intanto si prolunghi come al solito la perpendicolare De, finchè $De = eM$. Sia $Hq = qh$ per di sotto, $hb = b1$. Si meni bM, la quale, per il parallelismo regnante in figura, che sarebbe lungo più che difficile a indicare, dove s' interseca col piano Qq, ivi ferma il punto A. Facciasi pure $HG = AH$. Quindi fissati tutti li tre punti G, ed A, ed H.

Ora nel rimanente non abbiamo che a procedere come nella Fig. 55. cioè facendo per di sopra $GQ = Qg$, $HQ = Qb$; e per di sotto $Aq = qa$, $aC = CII$ ec. Imperocchè tirate le rette Ig, IIh, poi $1h$, $2a$, e per fine tutte le altre parallele rispettivamente a queste, verrà la figura compita, e determinati in essa tutti i punti che si cercavano.

ANNOTAZIONE I.

Facendo riflesso alla Fig. 55. si scorge che la *via di riflessione* è $= \overline{fI + gII + hIII} =$ pol. $11\frac{1}{2}$. Nella Fig. 56. detta via risulta $= \overline{gI + hIII} =$ pol. 7. 9. Quindi intendiamo che secondo la mia costruzione generale la Tavola non le avrebbe compresse, molto meno poi secondo quella del Tacquet.

ANNOTAZIONE II.

Termino questo articolo con un' annotazione curio-

riosa, ed è che se uno dei punti, per esempio il punto D, si movesse (*Fig.* 44.) mentre stesse fermo l'altro punto F, allora non ostante si raccoglierebbero tutti i raggi riflessi in F, quando D si movesse in una concoide, cioè quando tutti i raggi incidenti si conservassero eguali. Una figura di più basterebbe per dimostrarlo.

ARTICOLO II.

Della riflessione senza fine.

DAti tre piani disposti a triangolo (*Fig.* 57.) se si vuole, che un corpo partito per esempio da D ritorni in D, non abbiamo che ad indagare li due punti di riflessione Q ed E; ma se si desidera che tornato in D, in vece di ivi fermarsi, continui anzi su la medesima traccia il suo corso, allora diventa punto di riflessione anche il punto D, il quale perciò non può esser dato ad arbitrio, dipendendo la sua situazione anche da quella degli altri. Quindi mi è venuto in animo d' indagare quali e quanti punti di riflessione occorrerebbero, caso che un corpo elastico fosse mosso per dover riflettere in diversi piani ordinati a guisa di un poligono regolare, o irregolare, ma circoscritto da un circolo, e perciò per determinare detti punti in qualunque dato poligono, ora da quelli di un triangolo principierò, dati i quali si comprende facilmente che un corpo mosso su quella via, dovrebbe senza fine riflettere nei lati di detto triangolo, quando fosse costante la forza motrice. PRO-

Digitized by Google

PROPOSIZIONE I.

Dato il triangolo *esterno* ABF, descrivere l'interno DQE tale, che co' suoi lati faccia a cadaun lato del triangolo esterno ABF sempre gli angoli eguali.

COSTRUZIONE.

Dagli angoli del triangolo *esterno* calate le perpendicolari FD, AE, BQ ai lati opposti, ed uniti i punti D, E, Q; dico che il triangolo DEQ è il ricercato.

DIMOSTRAZIONE.

Volendo dimostrare per esempio che gli angoli EQF, DQA sieno eguali, si raddoppj la figura dalla parte di detti angoli, e si calino le rette D*d*, E*e*, che saranno per la costruzione perpendicolari al lato AF, e parallele alla perpendicolare B*b*.

Ora l'angolo *esterno* DQE è = alli due angoli interni opposti QE*e* + Q*e*E. Ma l'angolo QE*e* = angolo alterno BQE. Dunque l'altro angolo Q*e*E = all'altro angolo BQD. Intanto l'angolo Q*e*E = angolo QE*e*, perchè opposti ai lati QE, Q*e* eguali per esser similmente posti. Dunque BQE = BQD; e perciò tutto l'angolo DQE risulta diviso per metà dalla perpendicolare BQ. Togliendo dunque via BQE dall'angolo BQF retto per la costruzione, e l'angolo BQD dal retto

BQA, restano EQF, DQA complimenti ad un retto eguali. Il che era ec.

Potevasi ancora dire che nei due triangoli DQ*m*, EQ*n* essendo eguali gli angoli QD*m*, QE*n*, ed anche li due D*m*Q, E*n*Q, che sono retti per la costruzione, risultano eguali pure li due EQF, DQA.

ANNOTAZIONE.

Pertanto è rimarcabile: primo, che il centro C di un circolo circoscritto al dato triangolo *esterno* deve esistere nell'area di detto triangolo, altrimenti riuscendo il triangolo *ottusangolo* o *rettangolo*, anderebbero le perpendicolari a cadere fuori di detta area, e il dato triangolo *esterno* non sarebbe atto al Problema: secondo, essendo questo Problema determinato, non ammette altri triangoli *interni* che soddisfacciano al medesimo, ma ammette (fra certi limiti se il triangolo è irregolare, e se è regolare senza limiti) ammette, dissi, certe figure che chiamo *secondarie*, quali diamo tosto a conoscere nella seguente proposizione.

PROPOSIZIONE II.

Dall'angolo B (*Fig.* 58.) opposto al lato più picciolo DE dell'*interno* triangolo irregolare DEQ si tirino B*z*, B*y*, poi *z a*, *y d*, ed *ad* parallele ai rispettivi lati del triangolo suddetto. Dico ora che tutte le figure *secondarie* che metteranno gli angoli fra i limiti DB, D*a*; EB, E*d*; Q*z*, Q*y*, e che avran-

avranno pure i lati paralleli a detti lati come per esempio la figura $r\varkappa bsutr$.

I. Formeranno gli angoli $r, \varkappa, b, s, u, t$ di riflessione eguali.

II. Saranno di perimetro doppio del triangolo *interno* DEQ.

III. Saranno tutte fra loro isoperimetre.

DIMOSTRAZIONE.

Primo. I lati della sopraddetta figura sono per la costruzione paralleli ai lati del triangolo *interno* DEQ. Dunque sono come i lati del medesimo egualmente inclinati ai lati del triangolo *esterno* ABF. Ma i lati del triangolo *interno* DEQ formano ai lati del triangolo *esterno* ABF gli angoli di riflessione eguali. Dunque anche i lati delle suddette figure formano detti angoli $r, \varkappa, b, s, u, t$ di riflessione eguali. Ciò che era la prima parte da dimostrarsi.

Secondo. Le rette $r\varkappa$, DQ, su sono per la costruzione in progressione aritmetica. Dunque $r\varkappa + su = 2DQ$; ovvero $\frac{r\varkappa + su}{2} = DQ$; così per la stessa ragione $\frac{sb + rt}{2} = DE$; $\frac{tu + b\varkappa}{2} = EQ$. E perciò $\frac{r\varkappa + su + sb + rt + tu + b\varkappa}{2} = DQ + DE + EQ$; cioè $\frac{r\varkappa bsutr}{2} = DEQ$. Ciò che era l'altra parte.

Terzo. Tutte le figure ſimili alle figure *r x b s u t r* ſono, come or ora abbiamo dimoſtrato, di un perimetro doppio di quello del triangolo *interno* DEQ. Dunque ſono tutte fra loro iſoperimetre. Il che era l' ultima parte ec.

ANNOTAZIONE.

Qualche linea di più alla Fig. 58. baſterebbe per dimoſtrare che anche la figura B z a d y B, che determina gli ſovraccennati limiti, trovaſi, come le altre *ſecondarie*, doppia del triangolo *interno* DEQ, e con eſſe per conſeguenza iſoperimetra.

PROPOSIZIONE III.

Dato l' irregolare quadrilatero *eſterno* AHGF (*Fig.* 59.) deſcriverne un' altro *interno* DPEQ, che faccia co' ſuoi lati ai lati di eſſo gli angoli di rifleſſione eguali, come nel triangolo ſuddetto.

COSTRUZIONE.

Tirate le diagonali AG, FH, e dal loro punto d' interſecazione B menate le perpendicolari BP, BE, BQ, BD, dico che il quadrilatero *interno* DPEQ, che unisce le eſtremità di dette perpendicolari, è il ricercato.

DIMOSTRAZIONE.

Preſente la Fig. 59. rileggaſi la dimoſtrazione del Problema primo. Le lettere affiſſe corriſpondono dove

dove bisogna, a quelle della Fig. 57. e la dimostrazione parimenti è la stessa.

PROPOSIZIONE IV.

Il quadrilatero *interno* DPEQ non può fare ai lati dello *esterno* dato AHGF gli angoli di riflessione eguali, se non con due condizioni.

I. Che detto quadrilatero *esterno* AHGF sia circoscrivibile da un circolo.

II. Che nell'area del quadrilatero *esterno* AHGF trovisi il centro C del circolo circoscritto.

DIMOSTRAZIONE.

Primo. Essendo gli angoli di un triangolo = 2 retti, saranno (*Fig.* 59.) gli angoli H+F+D+P+Q+E=4 retti. Così pure gli angoli A+G+D+Q+P+E = 4 retti. Dunque H+F+D+P+Q+E=A+G+D+Q+P+E; e però H+F+D+P+Q+E—D—Q—P—E=A+G; ovvero purgando il primo membro delle quantità affette dei segni contrarj, sarà H+F=A+G. Ma (1) per la Geometria H+F+A+G=4 retti. Dunque H+F=2 retti, A+G=2 retti. Ora gli angoli opposti H+F, ovvero A+G di un quadrilatero inscritto in un circolo sono (2) = 2 retti. Dunque il quadrilatero esterno AHGF non soddisfa al problema, se non è circoscrivibile da un circolo. Il che era la prima parte.

Se-

(1) Th. 1. l. 1. *Tacquet Geom.*
(2) Propos. 22. l. 3.

Digitized by Google

Secondo. Non è meno evidente la neceſſità *dell'* altra condizione ; imperocchè quando il centro C del circolo circoſcritto trovaſi fuori dell' area del quadrilatero, cioè che il quadrilatero occupa uno ſpazio eſiſtente fra la circonferenza e il diametro, la diagonale per eſempio AG fa col lato FG l' angolo AGF ottuſo, e quindi l' angolo retto BEF fatto dalla perpendicolare BE eſſendo più picciolo dell' angolo ottuſo, rieſce (per la 21. l. 1.) fuori del quadrilatero, e perciò il caſo riſulta impoſſibile. Il che era l' altra parte .

ANNOTAZIONE I.

Senza prendermi la briga d' altre dimoſtrazioni noto di paſſaggio, che la neceſſità di queſte due condizioni ſuſſiſte per qualunque altro poligono *eſterno* dato .

ANNOTAZIONE II.

Per altro queſto Problema è indeterminato, ma per eſſere il quadrilatero *eſterno* irregolare, ha pur egli i ſuoi limiti, che crediamo di dover indicare. Deſcritto perciò nel dato quadrilatero (*Fig.* 60.) AHGF il quadrilatero *interno* DPEQ, dall' angolo G oppoſto ad uno dei lati minori PE deſcrivaſi il triangolo G*q*z coi lati paralleli ai lati del quadrilatero *interno* ſuddetto. Poi dall' altro angolo H oppoſto all' altro lato minore DP ſi ſegni il triangolo H*b*C, come ſopra. Così dico che averemo una ſchiera di quadrilateri (tirando i lati paralleli a quelli del quadrilatero *interno principale* DPEQ), i qua-

i quali, come il quadrilatero *euot*, metteranno gli angoli fra i limiti Q*q*, z D, PG, GE; ed un' altra ſchiera d' altri quadrilateri, come *m*K*fy*, fra i limiti DH, HP, E*h*, CQ, tutti i quali niente meno ſoddisfanno al Problema, che il quadrilatero *interno* DPEQ; perchè ſtante l' accennato parallelismo, formano anch' eſſi ai lati del quadrilatero *eſterno* AHGF gli angoli eguali.

PROPOSIZIONE V.

Il triangolo G*zq*, ed il quadrilatero DPEQ ſono iſoperimetri.

DIMOSTRAZIONE.

Prolungati i lati PD, EQ del quadrilatero interno DPEQ da una parte fino all' incontro di *zq* baſe del triangolo prodotta, e dall' altra fino all' incontro della retta *dr* condotta per G parallela ad EP, avviene che per eſſere i lati del triangolo e del quadrilatero per la coſtruzione egualmente inclinati ai lati riſpettivi del quadrilatero *eſterno* AHGF, rieſcano eguali le quattro quantità D*b*, *bz*, *zs*, *s*D; e parimenti le quattro Q*g*, *gq*, *ql*, *l*Q; così pure le quattro P*d*, *d*G, G*a*, *a*P; e finalmente le quattro E*r*, *r*G, G*x*, *x*E; e quindi abbiamo un nuovo quadrilatero *bdrg*, il di cui perimetro ſupera quello del triangolo G*zq* degli eccesſi *bz*, *qg*, *d*G, *r*G, non conſiderate D*b*, Q*g*, P*d*, E*r*, come quantità eguali ad *sz*, *lq*, *a*G, *x*G, che ſono anzi eccesſi

del

del triangolo G*z*q ſopra detto quadrilatero interno DPEQ. Dunque togliendo via dal nuovo quadrilatero *b d r g* detti eccesſi *bz*, *qg*, *d*G, *r*G, reſterebbe il ſuo perimetro eguale a quello del triangolo. Ma *bz* = D*b*, *qg* = Q*g*, *d*G = P*d*, *r*G = E*r*. Dunque levate via, come realmente eſiſte in figura, le aggiunte quantità D*b*, Q*g*, P*d*, E*r*, reſta il perimetro del quadrilatero DPEQ = perimetro del triangolo G*z*q. Il che era ec.

COROLLARIO I.

Siccome la dimoſtrazione procede egualmente, comparando qualunque quadrilatero *uote*, ovvero *m*K*fy*, o qualunque altro che fra gli indicati limiti foſſe delineato, quindi ſeguita che tutti li quadrilateri poſſibili dentro detto quadrilatero *eſterno*, e li due triangoli ſieno iſoperimetri.

COROLLARIO II.

Dato dunque un quadrilatero per eſempio DPEQ (*Fig.* 59. 60.) a cui ſi proponga di delineare o un triangolo, o un altro quadrilatero iſoperimetro, diviſi per metà (*Fig.* 59.) gli angoli di detto quadrilatero dalle rette BD, BP, BE, BQ, e menate le perpendicolari AH, HG, GF, FA a dette rette finchè s' incontrano, queſte formeranno il quadrilatero *eſterno* AHGF, dato il quale ſi potranno poi delineare come nella Fig. 60. li due triangoli, e quanti ſi vuole quadrilateri al dato, e fra eſſi eguali.

Co-

Digitized by Google

COROLLARIO III.

Quanto più i lati delle figure isoperimetre sono ineguali (1) tanto minor spazio racchiudono; ora più che li quadrilateri suddetti sono discosti dal quadrilatero *interno principale* DPEQ, tanto più sono diseguali. Dunque quanto più detti quadrilateri sono discosti dal *principale* contengono un minor spazio. E però se, dato un quadrilatero, se ne richiedesse un altro isoperimetro, il quale nulladimeno occupasse un minor spazio, non avrebbesi che a circoscrivere il dato quadrilatero del quadrilatero *esterno* AHGF, come nel Corollario secondo, e delineare poi in esso il quadrilatero ricercato. Così per contrario se, dato un quadrilatero, se ne volesse un' altro isoperimetro che occupasse uno spazio massimo possibile, o solamente un maggior spazio, dovrebbesi tuttavia circoscrivere il dato quadrilatero del quadrilatero *esterno*, come nel suddetto secondo Corollario, perchè poi il quadrilatero *principale interno* descritto, come nella costruzione del Problema terzo, soddisferebbe al primo caso, ed ogni altro quadrilatero, che fosse discosto dal *principale* meno del dato quadrilatero, soddisferebbe al secondo.

Crederei per altro che la dottrina di questo terzo Corollario non fosse per essere nella militare architettura del tutto indifferente, essendo una delle principali regole di questa scienza di racchiudere

(1) *De Chal. Geom. prat.* l. 2. Propos. 5.

una massima quantità di terreno dentro un contorno minimo possibile.

EPILOGO DI CIO' CHE SUCCEDE NEL CASO D' ALTRI POLIGONI *ESTERNI* DATI.

Primo. Per restringere in uno tutto ciò che appartiene a questa materia, avvertiamo primieramente che per qualunque poligono *esterno irregolare* la costruzione è sempre la medesima. Conciosiachè (supponiamo che sia irregolare il pentagono della Fig. 61.) sempre da un angolo A si tirano le diagonali ad un altro angolo E distante due lati, così da B ad F, da E a G ec. e dal loro punto d'intersecazione si menano le perpendicolari al lato BE, poi ad EF ec. e dall' estremità P, Q, H, ec. di queste descrivesi la figura *interna principale* PQHRD.

Il problema riesce sempre indeterminato rispetto alle figure *secondarie abey* ec. ma fra certi limiti più o meno ristretti, secondo la maggiore o minore irregolarità del dato poligono. Questi limiti poi si determinano cominciando sempre a descriverli dall' angolo opposto al lato più picciolo della figura *interna principale*, e paralleli ai lati rispettivi di detta figura, così appunto, come abbiamo praticato nei due ultimi problemi, primo e terzo.

Il perimetro delle *secondarie*, compreso tutto il loro andamento, sempre è doppio di quello della *principale*, perchè questa per entro ai lati del poligono *esterno* fa un sol giro, e quelle due. Il solo qua-

Digitized by Google

quadrilatero si pregia d' essere l' unico poligono, in cui le *secondarie*, e la *principale* sieno isoperimetre, perchè e questa e quelle per entro a' detti lati, girano una sol volta. Le *secondarie* poi sempre sono tra loro isoperimetre per la ragione altrove addotta.

La dimostrazione del Problema primo, e della proposizione seconda generalmente si estende a qualunque altro poligono *esterno*. Così le condizioni avvanzate nella proposizione quarta sono, come ivi abbiamo rimarcato, per qualunque altro esterno poligono assolutamente necessarie.

Secondo. Nei poligoni poi *esterni regolari* primieramente notiamo che per delineare le figure *interne principali* non vi ha d' uopo nè di diagonali, nè di perpendicolari, mentre dalla giusta metà dei lati di detti poligoni si descrivono, senz' altre perpendicolari che appunto indicherebbero detta metà.

Secondariamente non vi sono limiti, perchè tutti i punti del loro perimetro al problema si addattano.

Per fine tutto il resto accade, come or ora di sopra abbiamo osservato, rispetto ai poligoni esterni irregolari.

Terzo. Giacchè per mezzo delle figure *interne principali* abbiamo il vantaggio di conseguire tutte le *interne secondarie*, perchè per rendere simili problemi più ricchi di soluzioni, un medesimo poligono non potrebbe permettere più di una figura *interna principale*, a cui poi altre *secondarie* convenissero? Ciò veramente non è possibile nei poligo-

ni irregolari, ma nei regolari avviene con felicissimo successo. Imperocchè generalmente osserviamo che quando (*Fig.* 61.) un corpo elastico esiste per esempio prima di partire nella metà D del lato AB di un poligono regolare esterno dato ABE ec. supposto che debba riflettere in tutti i lati di esso, descrive passando per viaggio da un lato AB al lato più vicino BE, poi EF ec. un altro poligono *interno* simile DPQ ec. che è il *principale*. Se poi parte da un altro punto per esempio *a* fuori della metà del lato, tenendo una via sempre parallela ai lati del poligono *principale* suddetto egli descrive per viaggio, facendo due riflessioni per ogni lato, un poligono *interno abe* ec. di denominatore doppio del denominatore del poligono *principale*. Sin qui la soluzione del problema, la simmetria delle figure *principali* e *secondarie*, sia il poligono *esterno* dato *regolare* o *irregolare*, toltone appunto l' irregolarità, cammina del pari.

Ma se il corpo elastico nel suo viaggio (*Fig.* 62.) della metà D di un lato AB passasse alla metà Q di un altro lato EF distante dal primo un numero di lati, che non fosse misura del numero denominatore del poligono dato (come nel già addotto esempio del pentagono, in cui il 2 numero dei lati omessi, cioè un intiero e due metà, non è misura del 5 denominatore di detto poligono) e così camminasse via via ad altri lati similmente posti, egli descriverebbe, ma con altra simmetria, un altro poligono *interno principale* DQRPHD di un numero però di angoli eguale al primo. E non altrimenti se

ti se detto corpo elastico partisse da un punto *a* fuori della metà del lato, conservando per viaggio sempre una via parallela ai lati del *principale*, descriverebbe, facendo pure per ogni lato due riflessioni, ma con nuova simmetria, un altro poligono *interno a d u b* ec. di denominatore doppio parimenti del denominatore del poligono *interno principale* suddetto D Q R P H .

Quindi seguita che quanti più numeri, oltre l' unità, ha il denominatore del poligono *esterno* che lo dividano, tanto meno modi ha il problema d' esser risolto. Dunque se il denominatore del poligono *esterno* dato sarà un numero primo, il problema potrà esser risolto, le altre cose pari, in molte più maniere, che se non lo sarà. Quindi per esempio nel 7gono il problema potrà risolversi in tre maniere *principali*, perchè il 7gono *interno* si può descrivere, o omettendo un sol lato (nel qual caso la soluzione ricade in quella della Fig. 61.) o omettendone due, o omettendone tre, numeri che non sono misura del numero denominatore 7, tutte soluzioni che appartengono ai soli poligoni regolari, come quelle della figura 62. Così per la stessa ragione nell' 11gono il problema si può risolvere in 5 maniere principali, nel 13gono in 6 ec. senza contare le *secondarie* appartenenti alle rispettive *principali* suddette. Per contrario a proporzione del numero dei lati sono scarsi di soluzioni l' 8gono, il 10gono ec. perchè quantunque regolari, non hanno più dell' 8gono e 10gono irregolare che una soluzione nel numero 3, che

non

non è misura nè dell' 8, nè del 10 loro denominatore.

ARTICOLO III.

Della riflessione nel circolo.

POtevasi non senza ragione tralasciare in questo Trattenimento il circolo, come una figura da non annoverarsi nel numero dei poligoni, perchè quantunque si consideri come un poligono d' infiniti lati, egli è veramente poi quanto dire un poligono senza lati. Ma la simmetria del suo contorno che va tanto d' appresso a quella dei poligoni massimamente regolari, e la natura de' problemi che offre intorno alla riflessione, fa che anch' esso divenga, ma per poco, materia di divertimento; imperocchè di tanti diversi problemi che si costruiscono quali più facilmente nel circolo che nei poligoni, e quali più facilmente in questi che in quello, io ad un solo m' appiglio, cui in certi casi s' impiegano da altri (1) delle curve a costruirlo, e che da me (ciò che sarà per avventura nuovo e più gradito) viene, come vedremo or ora, organicamente risolto.

PROPOSIZIONE I.

Dato un punto radiante che deve riflettere nella *concava* o *convessa* periferia di un circolo dato, per andare ad un altro punto dato, determinare il punto

(1) *Rampinelli. Opr.* Lect. 8. Propos. 58.

Digitized by Google

to di riflessione conveniente a' detti punti meccanicamente .

Sei casi inchiude il proposto problema, conciosiachè li due punti possono darsi

I. Tutti due dentro dell' area del circolo dato .

II. Tutti due fuori del circolo .

III. Tutti due nella periferia .

IV. L' uno fuori del circolo, e l' altro nell' area .

V. L' uno fuori del circolo, e l' altro nella periferia .

VI. L' uno nella periferia, e l' altro nell' area .

A tutti questi casi resiste la macchinetta che presentemente descrivo .

COSTRUZIONE ORGANICA .

Supponiamo pertanto che (*Fig.* 63.) AXB sia il circolo dato, nel di cui centro C gira la punta di un anello quadrangolare H (disegnato a lato della figura). Un' asta poi CK corredata per di sopra di un pivolo X, e da X verso K fessa per mezzo quanto è lunga, viene intrusa in detto anello, e può girare in un con esso per tutto intorno a detto centro C. Quest' asta si caccia innanzi e indietro nel foro dell' anello, e come la distanza CX sia eguale al raggio del circolo dato, si ferma con una vite laterale, acciocchè il punto X sempre insista e precisamente nella sua periferia .

Questo pivolo X entra poi nel buco di due regoli AQ, BG, i quali uniti con altri due GK, QK formano un rombo mobile in tutti i quattro nodi X, G, K, Q de' suoi quattro eguali lati, cosicchè

o che

o che detto rombo s' allarghi, o si restringa, il nodo K non può però scostarsi dall' asta CK, perchè ad essa vien ritenuto dal suo chiodo K, che si produce e cala giù nella fessura XK di maniera, che scorrer può per essa innanzi, e indietro, ma non uscirne, e quindi fa che gli angoli GXK, AXC formati dai regoli da una parte dell' asta, sieno sempre eguali agli angoli QXK, BXC formati dall' altra parte.

Ravvisiamo dunque possibili in questo istromento così composto due movimenti: il primo dell' asta, che insieme coi regoli e del rombo che porta seco, si può far girare per tutto intorno al centro C. Il secondo dei regoli e rombo che nel medesimo tempo si possono stringere, ed allargare a piacere. Ora dico che in qualunque situazione dell' asta ed apertura dei regoli e del rombo suddetto, tirata al punto X (che deve esser come sopra nella periferia) una tangente TN, saranno gli angoli, fatti dai regoli BG, AQ con detta tangente, GXT=QXN, AXT=BXN.

DIMOSTRAZIONE.

Primo. Primieramente è manifesto che nel triangolo per esempio KXG, è l' angolo GXK = angolo GKX, perchè opposti ai lati GK, GX eguali per la costruzione. L'angolo poi GKX= angolo QXK, perchè alterni, essendo pure per la costruzione i lati GK, QX paralleli. Dunque GXK=QXK. Ora gli angoli KXT, KXN che la tangente TN fa col raggio CX prodotto, sono

ſono retti. Dunque levando via quinci dal retto KXT l'angolo GXK, e quindi dal retto KXN l'angolo QXK, che ſono, come diſſi, eguali, reſtano i complementi a un retto GXT = QXN.

Secondo. Secondariamente eſſendo ancora GXK = BXC, QXK = AXC, perchè al vertice oppoſti; ed eſſendo gli angoli CXT, CXN parimenti retti, riſulta pure per la ragione addotta AXT = BXN. Il che era quanto dovevaſi dimoſtrare.

APPLICAZIONE.

Una delle principali dilicatezze della eſpoſta coſtruzione è, che due piani dei due regoli maggiori verticali al piano del circolo dato, per eſempio li due AQ, BG che riguardano verſo al centro C, ſi debbono interſecare preciſamente nell'aſſe del pivolo X, cioè in un punto della periferia. Ciò avvertito, ſieno dati i punti D ed F in qualunque ſituazione relativa ad alcuno de' ſei caſi ſopraddetti (la figura 63. offre il primo caſo) per determinare il punto di rifleſſione x. Baſta girare intorno al centro C la macchinetta, e ſtringere nello ſteſſo tempo o allargare i regoli, finchè i piani verticali AQ, BG giungano a paſſare per detti punti D ed F, cioè finchè abbiano acquiſtata la ſituazione aFx, bDx, che allora il punto x ſarà il ricercato; perchè per la coſtruzione dell'iſtromento, menata la tangente tn, ſarà l'angolo d'incidenza alla tangente nel punto di contatto x, = all'angolo di rifleſſione: ſarà, diſſi, $Dxn = Fxt$. Lo ſteſſo farebbe

rebbe, se i punti D ed F fossero dati per di fuori, e per riflettere nella periferia *convessa* .

ANNOTAZIONE I.

Quando i punti D ed F si trovano nel medesimo raggio, la riflessione (sia nella periferia *concava* o *convessa*) non apparisce, perchè il corpo elastico va e torna su la medesima traccia. Secondo. Il problema per la riflessione nella superficie *convessa* è determinato ad un sol punto; ma nella *concava*, se i punti sono dati nell' area, possono occorrere ora un sol punto di riflessione (1), ora due, e qualche volta fino a quattro, come x, x, x, x nella figura 64; se i punti esistono nella periferia, i punti di riflessione possono essere infiniti, e sono determinabili facilmente col solo compasso; e così dite che varia il numero delle riflessioni possibili, secondo che entra in questione piuttosto l' uno che l' altro de' sei casi sopraccennati, e secondo la diversa posizione dei dati punti D ed F .

ANNOTAZIONE II.

Ma non so poi capire come tuttavia si parli in particolare della riflessione della luce in modo che pare (2) che si voglia insinuare che la luce affetti la più corta via, il che è falsissimo, e non riflette se non così, come tutti gli altri corpi elastici riflettono. Riflette per esempio per la più corta, quando urta in una superficie *piana* o *convessa*; ma per con-

(1) *Tacquet*; *Caseo*; l. 3. Propos. 15. & sequentibus .
(2) VViston nella nota alla geom. del Tacquet l. 1. p. 14.

Digitized by Google

contrario nella periferia *concava* di un circolo, sempre riflette per la più lunga; e ciò che è singolare, nella periferia *concava* di un elisse riflette per una via sempre eguale. Dunque a ragione conchiudo che la lunghezza del cammino che fa la luce nella riflessione varia così, come gli altri corpi elastici, secondo la diversa forma delle superficie riflettenti, e secondo la posizione relativa dei dati punti D ed F a dette superficie.

Troviamo in tutti gli autori dimostrato che nella superficie piana la luce riflette per la più corta via, e che nell' elisse riflette per una via sempre eguale. Ormai Dachales ha (1) pure dimostrato che, dati D ed F nella periferia di un circolo, detta luce riflette nella *concava* periferia per la via la più lunga. Ciò che per divertimento, non per necessità, anche a me piace di dimostrare nella seguente

PROPOSIZIONE II.

Dati (*Fig.* 65.) nella periferia di un circolo i punti D ed F, e il vero punto di riflessione X, la via di riflessione sarà FX+XD; e quando prendasi qualunque altro falso punto di riflessione z, sarebbe Fz+zD un' altra via. Ora dico che $FX+XD \geq Fz+zD$.

COSTRUZIONE.

Col centro in X ed apertura XF, ovvero XD, che sono eguali per la natura della riflessione nel

(1) *Catott.* l. 1. Suppos. 2.

circolo, descrivasi il semicircolo ABDF; indi si prolunghino FX, Fz fino all'incontro del semicircolo in A, e B, e si menino le rette AB, BD.

DIMOSTRAZIONE.

Primo. Essendo FABD un rettilineo inscritto in un circolo ABDF, risultano gli angoli opposti BAF + FDB = 2 retti. Intanto nel triangolo ABF l'angolo FBA è retto, perchè insiste sopra un semicircolo; onde per essere gli angoli di un triangolo eguali a due retti, sono pure BAF + AFB = a un retto. Ma AFB, ovvero XFz, ed XDz sono eguali, perchè misurati dallo stesso arco Xz. Dunque sostituendo XDz ad XFz, sono parimenti BAF + XDz = a un retto, e però zDB è complemento di FDX ad un retto.

Secondo. Sono in detto rettilineo FABD anche gli altri due angoli opposti ABD + AFD = 2 retti; e perchè FBA è retto come sopra, risulta FBD + AFD, ovvero XFD = a un retto; e però FBD complemento di XFD ad un retto.

Terzo. Ma FDX = XFD, perchè opposti ai lati, come abbiamo detto, eguali XF, XD. Dunque saranno eguali anche li complementi a detti angoli zDB, FBD, ovvero zBD; e per conseguenza nel triangolo zBD rileviamo i lati zB, zD opposti a detti complementi eguali.

Quarto. Ora FX + XD = FA per la costruzione, ed essendo ormai dimostrato zB = zD, risulta Fz + zD = FB. E poichè nel circolo (1)

FA

(1) Propos. 15. l. 3. *Eucl.*

FA>FB, perciò FX+XD>Fz+zD. Il che era ec.

COROLLARIO.

Quanto più il punto z sarà discosto da X tanto più sarà FX+XD>Fz+zD.

ANNOTAZIONE I.

La proposizione è molte volte vera anche quando i punti D ed F sono dati dentro o fuori dell' area del circolo dato; ma nella periferia *convessa* la riflessione procede sempre per la più corta via.

ANNOTAZIONE II.

Delle figure dello stesso denominatore inscritte in un circolo quella che fa gli angoli più alla tangente eguali è primieramente di un maggior perimetro, perchè ha anche più eguali i lati; ed in secondo luogo racchiude un maggiore spazio; imperocchè se ne racchiude di più anche quando sono isoperimetre; molto più ne devon racchiudere, se accade che quella sia anche di un maggior perimetro.

ARTICOLO IV.

Di Diottrica, o sia della Rifrazione.

UN raggio di luce R (*Fig. 67.*) che da un mezzo raro vada per via ad incontrarsi con un certo grado d' obliquità nella periferia di un dato circo-

circolo QBM di un mezzo più denso, nel punto del contatto B declina, siccome è noto, dalla prima direzione RM, e s' incammina per BA, facendo con la perpendicolare BC l' angolo di rifrazione ABC, il di cui seno è al seno dell' angolo d' incidenza RBK, ovvero al seno dell' angolo GBR complemento dell' angolo d' incidenza ad un quadrante KBG, sempre in data ragione; con questa legge ancora, che il raggio incidente RB, ed il raggio rifratto BA sempre si trovano nel medesimo piano perpendicolare alla superficie del mezzo rifrangente. Laonde dati infiniti raggi RB, KQ, DE ec. paralleli al diametro QP, che si rifrangono nella periferia del circolo suddetto, e de' quali la somma compone un rettangolo, che ha per base il suo diametro, ci viene in destro d' indagare quali e quanti di tutti detti raggi rifratti si anderanno ad unire in un medesimo punto A dato nell' area del suddetto circolo dato.

Il P. D. Ramiro Rampinelli celebre Professore nell' Università di Pavia mi propose in astratto il seguente Problema meccanico, prescindendo dal caso fisico a cui fosse addattabile, ed io gli mandai l' istromento che inventai fin d' allora, come egli pur riferisce (1), ordinato al problema medesimo, di cui ora la costruzione espongo.

PROBLEMA.

Determinare per mezzo del moto continuo (sono paro-

(1) Opt. Lect. 10. Propos. 70.

Digitized by Google

parole preciſe del lodato Profeſſore) nella periferia di un dato circolo QBP (*Fig.* 68.) tutt' i punti ſimili al punto B, il quale è tale, che ad eſſo condotto il raggio CB, una retta MB parallela al diametro QP, ed un' altra retta DB, che paſſi per un punto A dato dentro l' area del circolo dato; queſte tre rette formino alla periferia gli angoli MBC, ABC, ovvero DBF, de' quali i ſeni ſieno in data ragione, per eſempio di *m* ad *n*.

* Notate che l' angolo MBC della Fig. 67. è lo ſteſſo angolo MBC della Fig. 68. = angolo GBR al vertice oppoſto complemento dell' angolo d' incidenza ad un quadrante. L' angolo poi ABC è l' angolo di rifrazione in tutte due le figure.

COSTRUZIONE ORGANICA.

Prodotto il raggio BC, finchè BC.BF::*n*.*m*, con quattro pezzi ciaſcheduno eguale a BF, e due pezzi ciaſcheduno eguale a BC ſi metta inſieme un iſtromento compoſto di due romboidi BFDH, BLMC conneſſi inſieme, e mobili, ma non laſſamente, in tutt' i nodi; coſicchè l' angolo LBF, e gli altri angoli riſpettivamente ſi poſſano ſtringere o allargare a piacere. Secondariamente ſia tutto l' iſtromento volubile intorno a un perno fitto nel centro C della tavoletta ſoſpeſa inſieme con tutta la figura ad un piano verticale all' orizzonte. Finalmente due pendoli tengono teſo un filo, che attaccato in B forma le diagonali BM, BD dei romboidi ſuddetti.

Dico ora che quando (girando quindi l' iſtromento

Digitized by Google

to intorno al perno C fitto nella Tavoletta immobile, e quindi ſtringendo o allargando li due romboidi) il filo diagonale BM diventa verticale all' orizzonte, e l'altro filo diagonale BD paſſerà per il dato punto A, allora, eſſendo i ſeni degli angoli MBC, ABC in data ragione di *m* ad *n*, il punto B ſarà uno di quelli che ſi cercavano * e perciò (*Fig. 67.*) RB uno dei raggi rifratti che ſi dirigono nel dato punto A.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo per l' accennata coſtruzione i lati BF, FD(=BC)::*m*.*n*; ſaranno anche i ſeni degli angoli(1)oppoſti a detti lati BDF.DBF::*m*.*n*. Ma perchè li due triangoli MBC, DBF ſono ſimili ed eguali per la coſtruzione, riſulta l' angolo BDF = angolo MBC: l' angolo poi ABC è lo ſteſſo che l' angolo DBF. Dunque anche il ſeno angolo MBC, ſeno angolo ABC :: *m*.*n*. Finalmente le rette CB, MB, DB ſono per la coſtruzione diſpoſte a tenore del problema, onde ſono tutte le condizioni adempite, e provato quanto dovevaſi, e perciò il punto B è uno de' ricercati. Per trovar gli altri baſta portare l' iſtromento a deſtra del diametro QP; coſicchè le parti BHLM ſi trovino a deſtra, ed FD a ſiniſtra, e farlo poi muovere come a ſiniſtra ſi è fatto, finchè la diagonale BD torni a paſſare per il dato punto A, e la BM ſia verticale all'orizzonte.

Co-

(1) VVolf. *Trigon.* Theor. 2.

COROLLARIO I.

Quindi per il moto continuo dimoſtraſi che in tutta la ſemiperiferia ſuperiore due ſoli raggi concorrono nel dato punto A, perchè l' iſtromento non addita in eſſa che due ſoli punti ſimili al punto B. Sarebbero tre raggi nel caſo che il punto dato A eſiſteſſe nel diametro QP, come per eſempio (*Fig.* 67.) in *n*, perchè allora, oltre li due raggi B*n*, E*n* che vi concorrerebbero per rifrazione, vi concorrerebbe anche il raggio perpendicolare direttamente.

* Per far concorrere molti raggi in un ſol punto già ſi ſa che la circolare piegatura non è propria, ma ſi vogliono (1) altre curve ſtate già avvertite dal Nevvton, e dal Carteſio, e da me (2) in altra opera deſcritte meccanicamente.

COROLLARIO II.

Se il punto A dato foſſe nel corpo di una ſfera rappreſentata, ſupponiamo, per il circolo QBP (*Fig.* 67.) ma fuori del ſuo aſſe QP, li punti ſimili al punto B ſarebbero tuttavia ſolamente due.

Per quanto ſembri ſtrana queſta propoſizione, perchè la ſomma dei raggi paralleli cadenti ſopra un emiſfero compone un cilindro che ha per baſe un circolo maſſimo, dove che nel circolo ſi eguaglia, come abbiamo accennato, ad un rettangolo che ha per baſe il ſuo diametro; onde la quantità dei raggi

(1) *Nevvton*, Lib. I. Propoſ. 97. de' ſuoi princ. *Carteſ. Geom.* Lib. II.
(2) *Nuovi Iſtrom.* ec. Iſtrom. 7.

Digitized by Google

cadenti su la sfera è tanto maggiore della quantità di quelli che cadono sopra una periferia, quanto tutto il circolo è maggiore del suo diametro: non ostante detta proposizione è verissima. Imperocchè per far che più di due raggi concorressero per mezzo della rifrazione nel dato punto A di una sfera, bisognerebbe che detto punto A fosse comune a diverse sezioni o circoli della sfera coi loro diametri paralleli all' asse: il che non può essere perchè o il diametro di detti circoli coincide con l' asse della sfera, ed in tal caso essendo per il supposto il punto A fuori dell' asse, non può esser comune a detti circoli; o pure sono circoli de' quali il diametro non coincide con l' asse della sfera, ed allora il raggio incidente R B, il raggio rifratto B A non sarebbero nel medesimo piano perpendicolare alla superficie sferica del mezzo rifrangente, come abbiamo notato in principio, che in natura succede. Dunque non più di due soli raggi possono concorrere nel punto A dato nel corpo di una sfera, ma fuori del suo asse.

Quando poi il punto A venisse dato nell' asse della sfera per esempio in *n*, ivi, siccome è evidente, debbono concorrere tante coppie di raggi, quanti sono i circoli possibili o sezioni col diametro coincidenti nell' asse della sfera, perchè allora il punto A, cioè il punto *n*, è diventato comune a tutti detti circoli, o sezioni. Ora la somma di questi circoli è una periferia in quella maniera che l' equatore pareggia la somma di tutti i meridiani, e perciò le coppie dei raggi cadenti sopra cadauno di tutti

ti questi infiniti circoli formeranno su la sfera una periferia, della quale una retta condotta da B ad E ne sarebbe il diametro, e che sarebbe la base di una superficie conica B*n*E formata dai raggi, che rifrangendosi convergono, e si restringono tutti nel dato punto *n*, che n' è il vertice; dove anderebbe poi ad unirsi anche il raggio diretto KQ*n*, che coincide con l' asse della sfera e del cono luminoso, e passa per il centro della sua base.

COROLLARIO III.

Immaginiamoci che CA sia la Terra, *n*V l' equatore coi due Tropici, QBP la superficie sferica dell' atmosfera terrestre, e che i raggi RB, KQ, DE, ec. paralleli all' asse QP (qui non intendo l' asse astronomico, ma quel diametro QP che coincide col diametro dell' equatore *n*V) dal mezzo più raro della materia eterea passi a rifrangersi nella superficie sferica QBP dell' atmosfera terrestre più densa, e che il punto A sia fuori dell' asse su la superficie della terra.

Nel dato punto A non possono per le ragioni addotte concorrere che due soli raggi rifratti, e forse avverrà che, o per l' interposizione della Terra, o per l' obliquità (1) dell' angolo d' incidenza non ne concorra che uno, e talvolta anche nessuno.

Nel caso poi che il punto A fosse dato nell' asse, come per esempio in V, ivi concorreranno tutti i raggi rifratti, che formano il cono luminoso detto

(1) Se la obliquità passa li 47, o 48 gradi, si può dubitare che in vece di rifrangersi, si riflettano. *Nollet, Phys. Esp.* T. 5. Sec. 2. Cap. 3.

Digitized by Google

to di ſopra. Dal che chiara appariſce la ragione intrinſeca ed eſſenziale, onde i raggi ſolari ſieno più intenſi dentro i confini della zona torrida, che altrove, ed è che colà viene il caſo che ogni punto della ſuperficie terreſtre ſia per cauſa della rifrazione percoſſo da infiniti raggi ſolari uniti inſieme in detto punto, quando al di fuori al più può accadere che ogni punto venga eſpoſto all'azione di due ſoli raggi. Anzi trovandoſi nella perpendicolare VQ, che attraverſa l'atmosfera, ſucceſſivamente raccolti i vertici luminoſi d'infiniti altri coni minori; quindi un vegetabile, un animale, un uomo, il quale poſto in V occupa colla ſua altezza una parte di detta perpendicolare VQ, diventa berſaglio di tanti infiniti coni, quanti ſono di eſſi i vertici raccolti in detta parte.

* In queſto ſenſo adunque ſi dovrà tener per vero di qui innanzi quel principio, che il Sig. di Mairan fra gli altri introduce nella ſtima del caldo dell'eſtate, e freddo dell'inverno (1), cioè che nella zona torrida ſi raccolga una quantità di raggi maſſima poſſibile, perchè in fatti ella vi ſi raccoglie, ma nel modo che ho detto.

COROLLARIO IV.

Finora abbiamo oſſervato come la macchinetta ſoddisfaccia al problema nel caſo che ſi voglia un raggio di luce diretto dopo la rifrazione al punto A dato in un mezzo più denſo. Ora è da moſtrare come detta macchinetta regga anche quando il raggio da

(1) *Memoires de l' Academ.* ann. 1719. e 1720.

Digitized by Google

da un mezzo più denso si rifrange nella superficie circolare di un mezzo più raro. Allora il raggio rifratto declina dalla prima direzione BM, scostandosi dalla perpendicolare CB per un' altra direzione BH; onde il punto A trovasi a sinistra di BM, ed il seno dell' angolo MBC sarà al seno dell' angolo CBH in data ragione, per esempio di *m* ad *n*.

Producasi tuttavia (*Fig.* 68.) il raggio BC, finchè BC.BF :: *n.m*, ed all' opposto della passata costruzione facciasi che il filo diagonale BD diventi verticale all' orizzonte mentre l' altro filo BM passa per il dato punto A, perchè senza mutar altro di tutto il rimanente, il punto B sarà il ricercato. La dimostrazione è precisamente la stessa.

COROLLARIO V.

Concioſiachè la rifrazione della luce per lo più accade (1) che si faccia in senso contrario di quella degli altri corpi, la macchinetta elegantemente si addatta al problema anche rispetto agli altri corpi. Voglio dire che se un corpo passa da un mezzo raro in un mezzo circolare più denso, il filo BD dovrà stare verticale all' orizzonte, ed il filo BM passare per il dato punto A. Se il corpo si suppone che passi da un mezzo denso in un mezzo circolare più raro, il filo BM deve porsi verticale all' orizzonte, mentre l' altro filo BD passando per il dato punto A viene ad indicare il ricercato punto B; cosicchè in somma devesi per gli altri corpi adoperare

(1) *Carteſio, Dioptrices* Cap. 2. §. 9. *Nollet, Phyſ. Eſp.* Tom. 5. Secc. 2. Cap. 3.

Digitized by Google

re detta macchinetta al contrario di quel che ſi fa per la luce .

* Si noti per fine che in ſoſtanza tutte le coſe dette ſuſſiſtono , benchè o il raggio , o qual altro corpo rifratto , in vece di percorrere a traverſo del mezzo rifrangente una retta , come abbiamo ſempre ſuppoſto , ſi moveſſe in una curva . Il che per cauſa della denſità ineguale di detto mezzo può occorrere , e ſpecialmente accade ad un raggio di luce , il quale mentre ſi rifrange negli infiniti ſtrati dell' atmoſfera , che ſi ſuppone tanto più *denſa* , quanto più s' accoſta alla ſuperficie terreſtre , viene (1) determinato a moverſi per una curva .

Reſta per ultimo che non avendoſi finora avuti in rifleſſo ſe non raggi paralleli , ſi moſtri ormai come la macchinetta ſia applicabile anche ai raggi divergenti , che da un punto radiante veniſſero a rifrangerſi in una ſuperficie per il ſuppoſto conveſſa . Ma perciò baſta che al filo diagonale B M (*Fig.* 68.) ſi ſoſtituiſca (*Fig.* 66.) un regolo R B M mobile intorno a quel medeſimo chiodo B che uniſce li romboidi ſuddetti , e ſcorrente quindi ſul chiodo M comune a detti romboidi , e quindi in un chiodo R fitto nel piano , il quale ſiccome ſta per il punto radiante , così la porzione R B di detto regolo viene a rappreſentare un raggio incidente . Tutto il reſto procede come ſopra , nè ſaprei che foſſe d' uopo di dirne di più .

TRAT-

(1) La curva per cui ſi muove è una Cicloide . *Mem. dell' Academ.* ann. 1702.

Digitized by Google

TRATTENIMENTO V.

Miſcellanea .

DOvrebbe queſto trattenimento riuſcire più dilettevole degli altri , perchè variando ſpeſſo la materia della noſtra occupazione, così ſi va meglio a ſeconda dell' umano iſtinto, che ad ogni tratto di tutto s' annoja e ſempre anela a coſe diverſe e nuove. Veniamo pertanto al ſeguente

ARTICOLO I.

Circa certe quadrature .

COmincieremo perciò a trattenerſi intorno a due quadrature , le quali ſe non foſſero gran fatto importanti, non pertanto laſcieranno di tenerci alcun poco a bada con qualche piacere. Laonde dalla ſeguente principieremo .

PROPOSIZIONE I.

La ſomma di tutte le perpendicolari (*Fig.* 69.) erigibili ſopra il diametro *o a* di un circolo , che ſono medie proporzionali fra li riſpettivi ſegmenti del medeſimo diametro, dico che è :

I. Mi-

I. Minore di un medio proporzionale geometrico.

II. Ma maggiore di un medio proporzionale armonico fra le due somme di detti segmenti.

COSTRUZIONE.

Restringendo per ora la dimostrazione ad un quarto di circolo, figuriamoci che una perpendicolare Ck sia guidata per tutti i punti del semidiametro Ca, da C verso a. Quindi verrà tracciata l' area del quadrante kCa, che sarà eguale all' aggregato, o somma di tutte le perpendicolari Ck, bd, ec. erigibili sopra detto semidiametro Ca; le quali ad una ad una sono medie proporzionali fra gli infiniti rispettivi segmenti oC, Ca; ob, ba; ot, ta, ec.

Perchè poi la quantità de' segmenti è eguale alla quantità delle perpendicolari, perciò e li segmenti e le perpendicolari occuperanno una retta o spazio eguale; ma la retta occupata dalle perpendicolari è $= Ca$. Dunque facciasi la retta or, sa, che deve occuparsi dai segmenti $= Ca$. Inoltre perchè gl' incrementi dei primi segmenti oC, ob, ot ec. e li decrementi dei secondi Ca, ba, ta, ec. occupano pure la retta Ca, perciò si tiri la diagonale Cs, che taglierà tutto il rettangolo $roas$ in modo che il trapezio $roCs$ risulti eguale alla somma di tutti i primi segmenti, ed il triangolo saC pareggi la somma di tutti li secondi. In fatti nel trapezio $roCs$ trovansi distinti tutti li primi segmenti $pe = ob$, $xf = ot$ ec. siccome nel triangolo saC havvi tutti li secondi $eh = ba$, $fz = ta$, ec.

Ora

Ora dalla metà del ſemidiametro C*a* tirata la perpendicolare *bu*, ſarà il rettangolo *robu* = al trapezio *ro*C*s*; ed il rettangolo *sabu* = al triangolo *sa*C; perchè eſſendo li due triangoli C*be*, *sue* ſimili ed eguali per la coſtruzione, quanto ſi toglie via dai due piani da una parte, loro vien reſtituito dall' altra, come è evidente. Sarà dunque il rettangolo *robu* = alla ſomma di tutti li primi ſegmenti; ed il rettangolo *sabu* = alla ſomma di tutti li ſecondi.

DIMOSTRAZIONE.

Primo. Eſſendo la ſomma dei primi ſegmenti *o*C, *ob*, *ot*, ec. = al rettangolo *robu* per la coſtruzione, e la ſomma dei ſecondi ſegmenti C*a*, *ba*, *ta*, ec. = al rettangolo *sabu*, ſaranno dette ſomme come detti rettangoli; ma detti rettangoli avendo la medeſima altezza *or* = *as* per la coſtruzione, ſaranno come le loro baſi *ob*, *ba*. Dunque le ſuddette ſomme ſono come *ob*, *ba*; ma *ob*.*ba* :: 3.1. Dunque le ſuddette ſomme ſono, come 3.1.

Dal punto *b* eretta una perpendicolare *bd*, e per *d* tirata *nm* parallela ad *a*C, averemo tre piani *robu*, C*amn*, *sabu*, i quali perchè hanno le altezze *or*, C*a*, *as* eguali, ſaranno come le baſi *ob*, *bd* (= C*n* = *am*), *ba*. Ma *bd* è media geometrica tra *ob*, *ba*. Dunque il rettangolo C*amn* è medio geometrico tra li due rettangoli *robu*, *sabu*. Si recida da detto rettangolo C*amn* un ſemiſegmento di circolo *mdg* = *nd*K, la porzione del

quadrante $Cnda + mdg$ sarà eguale a tutto il quadrante, cioè eguale alla somma di tutte le perpendicolari erigibili ec. ma detta porzione $Cnda + mdg$ è minore del rettangolo medio geometrico $Camn$ di tutto il mistilineo gda. Dunque la somma di tutte le perpendicolari erigibili ec. cioè l' area del quadrante kCa è minore di un medio geometrico fra le due somme dei segmenti ec. Ciò che era la prima parte da dimostrarsi.

Pertanto su la medesima base Ca ergasi, in luogo di $Cn = bd = am$, una perpendicolare $Cy = ag = Ct = \frac{3}{4}$ di detta Ca; e si concepisca un rettangolo finito $Cagy = Ct \times Ca$. Noi averemo tuttavia tre piani $robu$, $Cagy$, $sabu$, i quali avendo le altezze or, Ca, as eguali, saranno come le basi loro ob, $Cy (= Ct)$, ba. Ora dette basi sono in proporzione armonica, cioè come li tre numeri 6. 3. 2. Dunque il rettangolo $Cagy$ sarà medio armonico fra li due rettangoli $robu$, $sabu$. Dimostrerò ora che il quadrante kCa, cioè la somma di tutte le perpendicolari erigibili ec. è maggiore di detto rettangolo armonico $Cagy$ in questo modo.

La proporzione assegnata dal Mesio fra il diametro di un circolo e la sua circonferenza è, come 113 a 355. Quindi la metà del raggio viene $= a$ parti $28\frac{1}{4}$, le quali moltiplicate per detta circonferenza $= 355$ formano un rettangolo prossima-

mamente = all' area del circolo, = a parti quadrate $10028\frac{3}{4}$. Queſte diviſe per 4, riſulta il quadrante $C\,k\,a$ = parti $2507\frac{3}{16}$.

Dividaſi ora il diametro oa (= 113) in ragione di ba ad ob, verrà ob = parti $84\frac{6}{8}$; $ba = 28\frac{2}{8}$; ed il medio armonico Ct ($= Cy$) = $42\frac{3}{8}$; e li tre termini armonici in ſchiera $84\frac{6}{8}.42\frac{3}{8}.28\frac{2}{8}$. Quindi $42\frac{3}{8} \times 56\frac{4}{8}$ ($= \frac{113}{2} = Ca$), riſulta il piano medio armonico $Cagy$ fra le due ſomme dei primi, e terzi termini = parti quadrate $2374\frac{4}{8}$, piano difettivo, come ſpicca da ſe, dall' importare del quadrante kCa (= alla ſuddetta ſomma $2507\frac{3}{16}$) di parti quadrate $132\frac{11}{16}$. Il che era l' altra parte da dimoſtrarſi.

COROLLARIO.

Quindi raccoglieſi che (moltiplicando ora per 4 tutte le ſomme) il piano medio geometrico, ed il

piano medio armonico fra le ſomme degli accennati ſegmenti, ſono due limiti, fra i quali eſiſte l'intiera area del circolo.

ANNOTAZIONE I.

Or ſi potrebbero reſtringere detti limiti molto più in queſto modo. Dal rettangolo $ob(=84\frac{6}{8})$ X $ba(=28\frac{2}{8})=2331\frac{11}{16}$ ſi eſtragga la radice, che ſarà $bd=54\frac{7577}{8000}$. Si moltiplichi poi $Ca(=56\frac{4}{8})$ per detta bd trovata or ora $=54\frac{7577}{8000}$. Noi averemo il rettangolo medio geometrico $Camn=$ parti quadrate $3104\frac{8191}{16000}$.

Dal rettangolo medio geometrico $Camn$ detratto il quadrante $=2507\frac{3}{16}$, reſta la differenza $*=597\frac{5191}{16000}$.

Dal quadrante detratto il rettangolo medio armonico $Cagy(=2374\frac{4}{8})$, reſta l'altra differenza $*=132\frac{11}{16}$.

Biſognerebbe ora dividere il rettangolo $nygm$

Digitized by Google

$nygm$ (= all'aggregato di dette differenze), ovvero, tenendo ſalda una medeſima altezza, la ſua baſe gm in proporzione di $132\frac{11}{16}$ a $597\frac{5191}{16000}$; perchè la retta tirata da detto punto parallela al diametro, e dividente per lungo detto rettangolo, determinerebbe un rettangolo compoſto del rettangolo armonico $Cagy$ + parte del rettangolo $nygm$, formato ſu la medeſima altezza Ca, tanto proſſimo all'area del quadrante, quanto la proporzione del Meſio lo permette. Ma queſta diviſione così minuta che in aſtratto è poſſibile, ſu la carta attualmente non lo è. Contentiamoci dunque di dividere detta gm, o piuttoſto (*Fig.* 70.), per facilitare per ora l'attual diviſione, la diagonale ym del rettangolo $nygm$ prolungato ad un altro quadrante

(ſuppoſta $= 597\frac{5141}{16000} + 132\frac{11}{16} = 730\frac{191}{16000}$)

prima per 4, onde verrà il quoziente $= 182\frac{32191}{64000} = yq =$ alla diagonale $\frac{ym}{4}$. Indi per 9, onde verrà un altro quoziente $= 81\frac{16141}{144000} = ye =$ a detta diagonale $\frac{ym}{9}$. La differenza di queſti due quozienti ſarà $= 101\frac{89982}{230400} = eq = yq - ye$. Ora al più

pic-

picciolo quoziente $= 81\frac{16191}{144000} = ye$, aggiungasi $eh = \frac{eq}{2} = 50\frac{1799}{2560}$. L' aggregato $ye + eh$, cioè $81\frac{16191}{144000} + 50\frac{1799}{2560}$ sarà $= 131\frac{939078}{11526250}$. Supponendo che con una simile operazione sia stata divisa gm in z, come la diagonale ym in h, averemo $gz = 131\frac{939078}{11526250}$ quantità che manca dell' importare della differenza del rettangolo armonico all' area del quadrante trovata di sopra $= 132\frac{11}{16}$ di questa sola frazione $\frac{15895627}{18442000}$. Conducendo dunque per detto punto h, ovvero z una retta $\varkappa z$ parallela al diametro del circolo, questa determinerà un rettangolo $\varkappa oaz$ composto dal rettangolo armonico $oagy$ + rettangolo $ygz\varkappa$ difettivo dall' area di un semicircolo l' importare di detta frazione.

Per sapere ora fino a qual termine sia sprezzabile in pratica una tal quantità $\frac{15895627}{18442000}$, riflettasi che la differenza gm (*Fig.* 69.) della media armonica $Cy = 42\frac{3}{8}$ alla media geometrica

$bd = 54\frac{7577}{8000}$ è $= 12\frac{4577}{8000}$ delle 113 parti preſe ſul diametro; differenza da noi poi diviſa per ſuppoſizione in parti $730\frac{191}{16000}$. Onde da queſta proporzione $12\frac{4577}{8000} . 730\frac{191}{16000} :: 1 . 76\frac{40487}{153154}$, ne viene che ſe $12\frac{4577}{8000}$ parti del diametro ſoffrono la diviſione in parti $730\frac{191}{16000}$; $\frac{1}{113}$ di detto diametro deve di dette parti portare parti $76\frac{40487}{153154}$; e tutto il diametro (moltiplicando $76\frac{40487}{153154}$ per 113) viene ad importare parti $8617\frac{133565}{153154}$; e però eſſendo una delle $730\frac{191}{16000}$ parti di $g\,m$ eguale ad una delle $8617\frac{133565}{153154}$ parti del diametro $o\,a$ per cauſa delle ſuddette operazioni, il difetto accennato di ſopra ſi deve intendere che ſia $= \frac{15895627}{18442000}$ di $\frac{1}{8617\frac{133565}{153154}}$ parte di detto diametro. Ma coſtruendo la Fig. 70. al di ſotto del diametro,

tro, come abbiamo fatto al di sopra; il difetto si raddoppia, e diventa $= \frac{31791254}{18442000}$ di $\frac{1}{8617\frac{133565}{153154}}$, cioè, riducendo se si vuole l' espressione ad una sola frazione, $= \frac{31791254}{372790425564026564400 0}$ parti di detto diametro $o\,a$.

Finalmente moltiplicata questa frazione per $x\,z$ = al diametro $o\,a$ = a parti, come sopra, $8617\frac{133565}{153154}$, troviamo che il rettangolo disteso anche al semicircolo inferiore $x\,r\,s\,z$ è minore dell' area del circolo dato di un rettangolo $= \frac{4196005482999508 2}{5709434483683292444411760 00}$ che presso a poco equivale ad $\frac{1}{13606832752}$ parte quadrata di detto diametro $o\,a$. Quantità sprezzabile, come ben si vede, poco men di un zero.

ANNOTAZIONE II.

Dalla suddetta annotazione deriva il modo di quadrare prossimamente e attualmente su la carta, o sul terreno un circolo dato $o\,d\,a\,f$ (*Fig.* 70.); imperocchè per le cose ivi esposte il problema si risolve così. Dividasi il raggio $C\,a$ del circolo dato prima

ma per 2 in b, poi per 4 in t. Da b si erga la media perpendicolare bd, e da un qualunque altro punto di detto diametro oa ergasi un' altra perpendicolare per esempio $oy = Ct$. Dall' estremità di dette due perpendicolari si tirino nm, yg parallele al diametro oa fino all' incontro delle tangenti il circolo in o ed a. Indi su la diagonale ym del rettangolo che ne risulta $mnyg$, prima si segni $yq = \frac{ym}{4}$, poi $ye = \frac{ym}{9}$. Finalmente dal punto b metà di $yq - ye$ tirata un altra xz parallela a detto diametro oa, sarà $oa \times 2az$, ovvero $xzsr$ prossimamente eguale all' area del circolo dato $odaf$.

Non mi è noto che una più prossima attuale quadratura del circolo siesi pur anche da veruno proposta, e non dubito che questa in pratica spesso non sia per riuscire e comoda e vantaggiosa.

PROPOSIZIONE II.

Ho altra volta pubblicato (1) la quadratura dell' 8gono, ora mi piace di esibire un quadrato eguale alla somma di tutt' i quadrati eretti sopra ciascheduno lato di detto poligono.

COSTRUZIONE.

Si tiri ad sottensa a tre lati as, sg, gd di un 8gono (*Fig.* 71.) prodotta fino all' incontro della fx normale al diametro af. Dico che $\overline{ax}^2 = 8\overline{fd}^2$.

(1) *Nuovi Istrom.* ec, pag. 205.

DIMOSTRAZIONE.

Si menino li due diametri af, gr, e le quattro ſottenſe a tre lati ad, fs, aq, fn, come in figura. Gli angoli alterni adg, dbf poſti fra le parallele dg, bf, ſono eguali. Gli angoli adg, sfd ſono eguali, perchè miſurati da archi eguali ag, sd. Dunque l' angolo $dbf = sfd$; e li due lati fd, db del triangolo bdf ſono eguali, perchè oppoſti ad angoli eguali; ed eſſendo fd un lato dell' 8gono, ſupporremo db un altro lato, e lo ſoſtituiremo al lato dg.

Ora perchè l' angolo adf alla periferia è retto; ſeguita che $\overrightarrow{bf}^2 = \overrightarrow{fd}^2 + \overrightarrow{db}^2$, ovvero $= \overrightarrow{fd}^2 + \overrightarrow{dg}^2$. Ma eſſendo pur retto l' angolo feb per la coſtruzione, riſulta $\overrightarrow{bf}^2 = \overrightarrow{fe}^2 + \overrightarrow{eb}^2$. Dunque $\overrightarrow{fe}^2 + \overrightarrow{eb}^2 = \overrightarrow{fd}^2 + \overrightarrow{dg}^2$.

Nel medeſimo modo provaſi $\overrightarrow{ae}^2 + \overrightarrow{eb}^2 = \overrightarrow{as}^2 + \overrightarrow{sg}^2$; $\overrightarrow{ae}^2 + \overrightarrow{em}^2 = \overrightarrow{an}^2 + \overrightarrow{nr}^2$; $\overrightarrow{fe}^2 + \overrightarrow{em}^2 = \overrightarrow{fq}^2 + \overrightarrow{qr}^2$. Ovvero (giacchè per la coſtruzione le due rette fa, bm ſono diviſe per metà in e, ed è $be = em$, $fe = ae$) ovvero, diſſi, ſaranno $4\overrightarrow{fe}^2 + 4\overrightarrow{eb}^2 = 8\overrightarrow{fd}^2$. Ma $\overrightarrow{af}^2 = 4\overrightarrow{fe}^2$; $\overrightarrow{mb}^2 = 4\overrightarrow{eb}^2$. Dunque $\overrightarrow{af}^2 + \overrightarrow{mb}^2 = 8\overrightarrow{fd}^2$. Soſtituendo pertanto la retta fx alla mb (che ſono eguali per eſſere parallele compreſe fra le parallele ax, nf, e normali tutte

tutte due al diametro af) averemo $\overline{af}^2 + \overline{fx}^2 = 8\overline{fd}^2$. Ormai $\overline{ax}^2 = \overline{af}^2 + \overline{fx}^2$. Dunque $\overline{ax}^2 = 8\overline{fd}^2$. Il che era da dimostrarsi.

ANNOTAZIONE.

Essendo il lato af del triangolo afx diviso per metà in e, abbiamo $ae.af::ab.ax$; ma $ae.af::1.2$. Dunque $ab.ax::1.2$. Avrebbesi perciò potuto ancora dire che il quadrato eretto sopra una retta doppia di ab fosse eguale alla somma dei quadrati di tutti i lati dell' 8gono. Inoltre la doppia ab, ovvero ax risulta media proporzionale tra $1fd$, e $8fd$; imperocchè $1fd \times 8fd = 8\overline{fd}^2$.

ARTICOLO II.

Della Proporzione Armonica, e Contrarmonica.

NElla Fig. 72. noi troviamo raccolti in uno i luoghi geometrici di tutti i medj delle proporzioni che usiamo. Imperocchè eretto un quadrato ADPK sopra una retta AD data di posizione, la parallela GH, distante dalla data AD uno spazio $CV = \frac{AD}{2}$, viene ad essere il luogo di tutti i medj aritmetici fra i segmenti di detta AD. Secondo. Un circolo AVD descritto col raggio

$CV = \frac{AD}{2}$ pure è il luogo di tutti i medj geometrici. Terzo. La parabola $A\varkappa VD$ col parametro $= \frac{AD}{2}$ pur anche fia il luogo di tutti i medj armonici preſi dalla data AD fino alla curva dalla parte concava. Quarto. Finalmente eſſa parabola è pure il luogo di tutti i medj contrarmonici preſi dal lato KP fino alla curva dalla parte conveſſa; e quindi fra i ſegmenti qualunque AB, BD la perpendicolare BT riſulta un medio aritmetico; $B\zeta$ un medio geometrico; $B\varkappa$ un medio armonico; $R\varkappa$ un medio contrarmonico. Ma eſſendo in quelle coſtruzioni che frequentemente occorrono, l'intervento di una curva ſempre in pratica un impaccio, ed eſſendo bene, quando il caſo il permetta, di ſtarſene al ſolo compaſſo e riga, perciò reco io qui un modo faciliſſimo di conſeguire i medj armonici, e contrarmonici ſenza la parabola nella ſeguente coſtruzione.

PROPOSIZIONE.

Trovare un medio armonico, e un medio contrarmonico fra i ſegmenti per eſempio AB, BD, di una retta AD di poſizione data.

COSTRUZIONE.

Facciaſi $Dn = DB - BA$, che ſarà la differenza

za del primo termine AB al terzo BD; e i punti A, *n* si uniscano con una retta, alla quale da B si meni la parallela B*m*. Stabilito il quadrato come sopra, tirate le diagonali AP, DK, poi BR = AD, e segnata *e x* = *m n*; dico che B*e* + *e x*, cioè B*x* è il medio armonico, e che AD — B*x*, ovvero BR — B*x* = R*x* è il medio contrarmonico.

DIMOSTRAZIONE.

Primo. Essendo nella proporzione armonica il primo termine al terzo, come la differenza del primo al secondo alla differenza del secondo al terzo, bisogna che la differenza poi del primo termine al terzo, che è eguale alla somma di dette differenze, si concepisca divisa in ragione di detti termini, e che il secondo termine sia eguale al primo + il segmento minore di detta differenza del primo termine al terzo; e che il terzo termine sia = al secondo + il segmento maggiore di detta differenza.

Ciò posto, perchè in figura gli triangoli AB*e*, ACV sono simili, sarà B*e*.BA::CV.CA. Ma CV = CA per la costruzione. Dunque B*e* = BA primo termine armonico.

In oltre essendo parimenti simili i triangoli AD*n*, BD*m* abbiamo AD.D*n*::BD.D*m*, alternando AD.BD::D*n*.D*m*, dividendo AD — BD.BD::D*n* — D*m*.D*m*, ovvero AB.BD::*nm*.*m*D, cioè come il primo termine al terzo, così il più picciolo segmento *nm* al segmento maggiore *m*D della differenza del primo ter-

termine al terzo. Dunque per ciò che or ora abbiamo detto, aggiungendo $ex = nm$ a $Be = BA$ primo termine, sarà la composta Bx il secondo termine, o sia il medio armonico ricercato. Il che era la prima parte da ec.

Secondo. Nella proporzione poi contrarmonica stando per contrario il primo termine al terzo, come la differenza del secondo al terzo alla differenza del primo al secondo, risulta per le cose dette il secondo termine di detta proporzione eguale al primo + il maggior segmento mD dalla differenza del primo termine al terzo, e quindi aggiungendo $Ex = Dm$ ad $RE = RK = AB$ primo termine, sarà la composta Rx il secondo termine, o sia il medio contrarmonico proposto. Il che ec.

ANNOTAZIONE I.

Non è meraviglia che il termine medio armonico + il medio contrarmonico sia eguale alla somma del primo e terzo termine, dico $= AB + BD$. Imperocchè al primo termine + il minor segmento ($= \overline{AB + mn} = \overline{Be + ex} =$ al medio armonico) aggiunto il primo termine + il maggior segmento ($= \overline{AB + Dm} = \overline{RE + Ex} =$ al medio contrarmonico) viene una somma appunto $= \overline{Be + ex + xE + ER} = BR = AB + BD$, e quindi seguita che sottratto il medio armonico da' due estremi $AB + BD$, resta il medio contrarmonico,

co, e per contrario ſottratto il contrarmonico, reſta ec. Ciò che ſpicca chiaramente anche nei numeri, mentre nelle due proporzioni armonica 3 : 4 : 6, e contrarmonica 3 : 5 : 6, la ſomma dei due medj $\overline{4+5}=9$ rieſce $=\overline{3+6}=9$ ſomma dei due termini eſtremi.

ANNOTAZIONE II.

Non mancano nei libri d'Aritmetica delle regole per rilevare anche fra due termini dati in numeri un medio armonico, ma il ſeguente metodo ſembrami più ſpedito. Sia a il primo termine, b il terzo, x il medio incognito. Per la natura della proporzione armonica ſarà $a-x.x-b::a.b$; e quindi $ab-bx=ax-ab$. Dunque $2ab=ax+bx$; e in fine $\frac{2ab}{a+b}=x$.

Dati perciò li due eſtremi termini, per eſempio 5.20, per trovare un medio armonico ſi moltiplicheranno inſieme detti termini, e ne verrà 100, il doppio ſarà 200. Queſto diviſo per $\overline{5+20}=25$, il quoziente 8 che ne viene è il medio armonico ricercato. Se queſto 8 ſi ſottragga dalla ſuddetta ſomma $\overline{5+20}=25$, il reſiduo 17 riſulta il medio contrarmonico, come appariſce diſtinto nelle ſeguenti proporzioni, armonica $5 \overset{3}{:} 8 \overset{12}{:} 20$, e contrarmonica $5 \overset{12}{:} 17 \overset{3}{:} 20$.

AR-

ARTICOLO III.

De' triangoli isoperimetri nel circolo, e di una curva applicata agli stessi.

DAto un triangolo possiamo cercarne un altro, che sia non solo isoperimetro, ma obbligato anche a qualche altra condizione. Per esempio nella Fig. 73. vien proposto di trovare un triangolo isoscele HFQ isoperimetro ad un altro, ma dati tutti due nel medesimo circolo. Il circolo perciò è una *direttrice* variabile a capriccio, e che poteva essere del pari una linea retta, un ellisse, una concoide di base circolare ec. e il suo diametro è una linea data di posizione, perchè ad essa potevasi applicare qualunque altra direttrice.

Essendo pertanto il triangolo dato isoscele, abbiamo il vantaggio, benchè non necessario, di poter operare sopra una sola metà, cioè cercare solamente HF + F5 = HD + D3; e però lo stretto di questa soluzione consiste in determinare nella linea di posizione HG il punto 5 tale, che la perpendicolare tirata per esso alla periferia del *circolo direttore* fissi quinci per una metà del triangolo il punto F, e quindi per l'altra metà il punto Q, dico tutto il triangolo HFQ, quale volevasi. Questo dapprima credetti che fosse un problema di conversazione, ma in appresso trovai che è un poco serio, mentre non si risolve se non per mezzo di una curva, la quale è di quar-

quarto grado. Penso perciò che torni a conto: primo, di descriverla prossimamente per punti: secondo, di rimarcare le principali sue proprietà: terzo, di descriverla poi anche organicamente.

DESCRIZIONE PER PUNTI DELLA PREFATA CURVA.

Questa curva per qualunque triangolo dato nel circolo dato è sempre la stessa, come mostreremo nella terza proposizione, e della medesima natura, e soggiace alla medesima costruzione; varia solo di situazione secondo il variare de' triangoli dati, e mostra quando il caso è impossibile, e indica, se è possibile, il triangolo isoperimetro che si cerca. Vengo dunque alla descrizione per punti della curva che appartiene per esempio al triangolo dato HDR; perlocchè si prolunghi il lato HD, finchè D III = D 3. Indi con l' apertura di compasso H III ergasi su la linea di posizione, cioè sul diametro HG prodotto, se occorre, il quadrante MC. Dal punto H, e dai punti A, B, D ec. d' intersecazione dei raggi HI, HII, ec. con la periferia della *direttrice*, si calino ad HG altrettante perpendicolari indefinite H*a*, A 1, B 2, D 3 ec. perchè segnata H*a* = HM. A 1 = AI. B 2 = BII. D 3 = DIII. E 4 = EIV. F 5 = FV; e condotta la curva per li punti *a*, 1, 2, 3, 4, 5, ec. questa sarà il luogo geometrico e del punto d' intersecazione 3 che si aspetta al triangolo dato HDR, e del punto d' intersecazione 5 che appartiene al triango-

lo ricercato HFQ. Imperocchè essendo per la costruzione D3 = DIII, ed F5 = FV, risulta HD + D3 = HIII, HF + F5 = HV. Ma HIII = HV pure per la costruzione. Dunque HD + D3 = HF + F5, ed il punto 5 quale si ricercava.

PROPRIETA' PRINCIPALI DELLE PREFATE CURVE.

Dunque se la curva non s' interseca due volte col diametro, o *linea di posizione* HG, un triangolo isoscele dato in un circolo, o qual altra *direttrice* non può avere nella medesima un altro triangolo corrispondente isoperimetro. Or quando avverrà che la curva s' intersechi una sol volta? primo, quando il perimetro del triangolo dato sia troppo picciolo: secondo, quando detto perimetro nel dato circolo, o qual altra direttrice, sia il massimo. E troppo picciolo quando è eguale o minore di due diametri HG. Tale poniam che sia eguale a' due diametri, detto perciò *diametrale*, il triangolo HBN, onde la metà HB + Bn sia = HG; la curva che produce detta pure *diametrale* dK n m bG s' interseca una sol volta con HG in n, e l' altra volta non s' interseca, ma finisce in G; perchè è impossibile che la lunghezza HG vicina a terminare in HG possa far angolo sopra tutta la medesima lunghezza HG; e quindi seguita che molto meno saranno a proposito per avere un compagno isoperimetro li triangoli minori di HBN, come

Digitized by Google

me per esempio il triangolo HAK, o qualunque altro che metta gli angoli fra HB, ed HN, appunto perchè HA + Ae < HG.

Per conoscere poi che esiste in figura anche un triangolo di massimo perimetro, osserviamo che quanto più un triangolo HDR con gli angoli per esempio R, D, da N e B s' accosta verso P ed E; e così pure l' isoperimetro corrispondente HFQ con gli angoli Q, F, da G s' accosta verso detti punti P ed E; tanto più detti triangoli riescono di un maggior perimetro, come non resteremo di dimostrare nella proposizione seconda. Dunque crescendo sempre più di qua e di là dette coppie di triangoli isoperimetri verso P ed E, finalmente verranno ad incontrarsi, e terminare uniti in un sol triangolo HEP, che sia di un massimo perimetro.

Le curve rispettive delle predette coppie de' triangoli isoperimetri s' accordano ad indicare lo stesso: imperocchè l' arco *nmb*G per esempio della curva diametrale *d*K*nmb*G prodotta dal triangolo HBN, crescendo questo di perimetro, s' abbassa e si restringe, mentre s' accosta per gradi all' arco 3, 4, 5 della curva spettante al triangolo HDR; finchè detto arco tant' oltre pur si restringe e s' abbassa, che (sparita ogni larghezza 35, e altezza d' arco z4) diventa = o; nel qual caso il diametro HG trovasi tutto al di sopra della curva *pozq*, cui soltanto rimane tangente in z. Dunque il triangolo HEP che appartiene a detta curva è il massimo, perchè a differenza degli altri che hanno il peri-

metro eguale ſolamente ad HE*b*, ovvero HE*4*; ed in vantaggio del proprio perimetro impiega anche il reſto d' altezza qualunque ſiaſi z4.

Eccoci pertanto giunti a ſtabilire i limiti di tutti i caſi poſſibili e impoſſibili del propoſto problema; imperocchè (ſuppoſto che il perimetro del triangolo HBN ſia = a due diametri o *direttrici* HG) detto triangolo e tutti quelli che metton gli angoli fra HB, ed HN, come il triangolo HAK, ſono nel caſo impoſſibile di avere nel dato circolo, o *direttrice* altri triangoli iſoperimetri. Tutti quelli che metton gli angoli fra BE, ed NP, come il triangolo HDR, trovano li ſuoi corriſpondenti iſoperimetri, che mètton gli angoli fra GE, e GP. Nel caſo impoſſibile di avere un compagno iſoperimetro trovaſi pure il triangolo HEP, perchè è il maſſimo, ed è un equilatero, come quanto prima dimoſtreremo nella prima propoſizione. Or ſopra queſta poſſibilità e impoſſibilità de' caſi conſultiamo le curve riſpettive; perciò ſempre che la curva non s' interſeca due volte col diametro, o ſia *direttrice*, il caſo è impoſſibile; poſſibile ſempre che due volte s' interſeca; impoſſibile quando, o la curva tocca ſolamente il diametro, o vi ſta al di ſotto diſcoſta.

Un' altra oſſervazione importa molto che non ſi tralaſci, come quella che ſola reſta a compiere perfettamente la coſtruzione preſente, e ritorna la curva nel ſuo vero aſpetto. Onde dico che una tangente al circolo nel punto G eſtremità del diametro HG, è del pari tangente alla curva *diametra-*

Digitized by Google

trale $dKnmbG$, ed a tutte quelle che vi ſtan ſotto, come $a\,1\,2\,3\,4\,5$, $p\,o\,z\,q$, ec. perchè i punti o elementi ſucceſſivi che formano per eſempio detta curva diametrale (ciò che s' intenda detto, le altre coſe pari, anche delle altre curve) ſono l' eſtremità di una Hd normale al diametro HG, che mantenendoſi ſempre parallela a ſe ſteſſa paſſa in AK, Bn, Dm, Eb, ec. finchè abbreviandoſi ſempre più, e nel punto G diventata infinitamente picciola, non perciò ceſſa d' eſſer normale, e però parte della tangente al circolo nel punto G, punto al circolo, ed alla curva comune. Quindi s' inferiſce che la ſuddetta curva $dKnmbG$ non è che un ramo dell' intiera, che con un altro ramo formando un nodo, o ſeno, ritorna dalla parte oppoſta ad interſecarſi con ſe ſteſſa nel punto n. Mirata ora la curva in queſto aſpetto, come ci viene in parte rappreſentata nella Fig. 75. HG ſia il ſuo aſſe; G il vertice; $5q$, zb, ec. le ordinate; $5G$, zG, ec. le riſpettive aſciſſe. Le curve che ſtanno al di ſopra della *diametrale*, come quella che ſi aſpetterebbe al triangolo HAK (*Fig.* 73.) non ſono che porzioni di una metà. Continuano con un capovolto delle perpendicolari, e formano pure nel ritorno per l' altro ramo un nodo. Tali porzioni ſono maggiori o minori, ſecondo che il triangolo dato è più o meno picciolo del triangolo diametrale. Intanto laſciando d' avvertire certe altre coſette meno importanti, e che ſi danno poco meno che a vedere da ſe, per ſoddisfare alla noſtra promeſſa, veniamo alla ſeguente.

Digitized by Google

PROPOSIZIONE I.

Il triangolo massimo, in cui le coppie de' triangoli isoperimetri vanno a terminare, è un equilatero.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo la trasversale HE (*Fig.* 74.) e la perpendicolare EP corde eguali, perchè lati di un equilatero, recidono per la natura del circolo archi eguali, e però sono alla tangente al circolo nel loro punto di concorso E egualmente inclinate. Dunque alla tangente al circolo nel punto F situato fra G ed E sarà la perpendicolare 5F inclinata più della trasversale HF; e per contrario alla tangente nel punto D posto fra E ed H sarà la trasversale HD inclinata più della perpendicolare D3. Ciò posto, dico che HE + Ez > HF + F5, ed anche > HD + D3. Imperocchè (descritto l'arco D*m* col raggio HD, e l'arco E*q* col raggio HE, e menate E*t*, F*n* parallele al diametro) mentre la trasversale HF va ad urtare nell'arco EG meno obliquamente che non fa la perpendicolare 5F, il decremento *q*F di HF passato in HE è minore dell'incremento *n*E di 5F passato in zE. Dunque sarà HE + Ez > HF + F5. E perchè la trasversale HD urta nell'arco HE dall'altra parte più obliquamente della perpendicolare 3D, perciò l'incremento *m*E di HD pas-

passata in H E è maggiore del decremento s D di 3 D passata in z E, e quindi tuttavia risulta H E + E z > H D + 3 D. Il che era ec.

COROLLARIO.

Per questa ragione seguita che i triangoli più che s' accostano all' equilatero, sono di maggior perimetro.

PROPOSIZIONE II.

Il lato E P del triangolo massimo (*Fig.* 73.) è il luogo geometrico delle massime ordinate z *b*, z 4 ec. comprese nel nodo di tutte le curve isoperimetre.

DIMOSTRAZIONE.

La dimostrazione instituita (*Fig.* 75.) su la curva diametrale K *n m b q* G servirà di norma per tutte le altre. Intanto noi abbiamo H E + E z > H D + D 3 per la precedente. Ma H E + E *b* = H D + D *m* per la costruzione. Dunque *b* z > *m* 3; perchè levando quantità eguali da due quantità una maggior dell' altra, il residuo della maggiore resta tuttavia maggiore di quello della quantità più picciola. Inoltre H E + E z > H F + F 5 pure per la precedente, ed è per la costruzione H E + E *b* = H F + F *q*. Dunque per la suddetta ragione *b* z > *q* 5. Onde riuscendo *b* il punto più elevato degli altri, perciò

ciò z *b* fia la maggior ordinata della curva diametrale. Or queſta ordinata eſiſte e coincide per la coſtruzione nel lato EP. Dunque il lato EP ec. Il che era ec.

COROLLARIO.

Quindi ſeguita che la tangente alla curva nel punto *b* ſia parallela al diametro del circolo direttore, e normale alla tangente alla medeſima curva nel vertice G.

ANNOTAZIONE.

Dalla ſola coſtruzione già appariſce che la maſſima ordinata fuori del nodo è ſempre la tangente al circolo nel punto H.

PROPOSIZIONE III.

La curva diametrale *d* K *n m* ec. (*Fig.* 73.) e tutte quelle che le ſtanno al di ſotto, come *a* 1 2 3 ec. *p o z* ec. ſono ſimili ed eguali, cioè ſono una iſteſſa curva diverſamente ſituata.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo (*Fig.* 73.) HA + AK. HB + B*n*. HD + D*m* ec. tutte fra loro eguali, e parimenti fra loro eguali HA + A1. HB + B2. HD + D3. ec. da queſte levando via quelle, reſtano pure eguali le differenze K1. *n*2. *m*3. ec. le quali perchè ſono anche coſtantemente parallele, perciò i punti K, 1; *n*, 2; *m*, 3; ec. ſi trovano ſimilmente po-

Digitized by Google

posti; ciò che essendo vero di tutti gli altri punti intermedj, che formano l'andamento seguito di tutta la curva, quindi tutta la curva diametrale risulta simile ed eguale alla curva *a* 1 2 3 4 ec. che le stà al di sotto, e così dicasi di tutte le altre. Il che era ec.

ANNOTAZIONE.

Voi ben vedete che a questo modo è lo stesso che tirar giù per una direzione costante la curva diametrale, finchè pervenga in qualunque altro sito *a* 1 2 3 ec. ovvero *p o z* ec. Così ciascuna curva è la stessa curva diametrale diversamente situata.

Altre belle proprietà resterebbero d'indagare intorno a questa nuova curva, ma contenti noi di ciò che era più a proposito del nostro oggetto, passiamo senz'altro più a divertirsi nella costruzione dell'istromento con cui debbesi descrivere meccanicamente.

DESCRIZIONE ORGANICA DELLE CURVE SOPRADDETTE.

La macchinetta che serve a questa descrizione, è tanto semplice (*Fig. 76.*) che niuna fatica importa per concepirla. Un raggio $3r =$ a quello del circolo direttore H A B ec. con un uncino *r* all'estremità *s* s'insinua nella fessura di una riga a squadra mobile lungo il lato P Q di una tavoletta rettangolare P Q K L. Una cordicella fissa nel punto H passa d'intorno al suddetto uncino *r*, e va a met-

ter

Digitized by Google

ter capo ad uno ſtilo 5, che entra parimenti nella feſſura ſuddetta, e deve ſu la carta ſegnare la curva.

Suppoſto che ſi voglia deſcriver la curva nella ſituazione ſpettante per eſempio al triangolo HDR, poſſiamo far ciò in due differenti maniere. Nella prima ſi addatti all' iſtromento la cordicella di lunghezza = HD+D3. Si collochi in principio di moto la feſſura della ſquadra ſopra la tangente MH. Il raggio 3*r* coinciderà con 3H, la cordicella con H*a*. Indi con la mano ſiniſtra ſi promoverà la ſquadra da P verſo Q, ajutando con eſſa anche il raggio uncinato a paſſare per i punti H, A, B ec. del circolo direttore, intanto che la deſtra con lo ſtilo 5, tenendo bene e ſempre la cordicella egualmente teſa, accompagna detto movimento, e deſcrive ſu la carta la curva, la quale ſarà finita, quando la cordicella dalla ſituazione H*r* rappreſentata in figura, e il raggio 3*r* pervenuti in HG, lo ſtilo 5 troveraſſi in *e*, tanto da G diſtante quanto HD+D3, ovvero H*r*+*r*5 ſarà maggiore del diametro HG. La retta *ne* da *e* condotta parallela ad HG fia il ſuo aſſe, e perciò menata *bg* diſtante da *ne*, quanto *ne* è diſcoſto da HG, e traſportato il chiodarello H in *b*, ed il centro 3 in X, e diſpoſto l' iſtromento come ſopra, facendolo girare dalla parte oppoſta, verrà deſcritto anche l' altro ramo.

Nella ſeconda maniera ſi traſporti il chiodarello H in *n*, ed il centro 3 in *x* ſull' aſſe *ne*, con la cordicella di lunghezza eguale ſolamente ad HG, che

Digitized by Google

che mosso l' istromento, verrà del pari descritta la curva con moto non interrotto nell' uno, e nell' altro ramo. Questo avviene perchè in tutti due i modi, ed in ogni situazione, $Hr + r5$ deve per la costruzione mantenersi sempre $= HD + D3$ nel primo caso, ovvero $= HG$ nel secondo; ed $r5$ sempre normale al diametro HG ed all' asse ne, che è quel più che si richiede, acciocchè la costruzione meccanica alla geometrica corrisponda.

IL FINE.

Digitized by Google

Digitized by Google

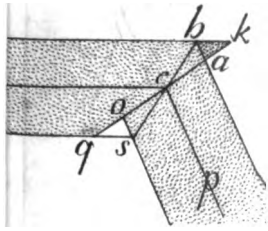


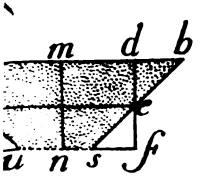
Fig. 8.

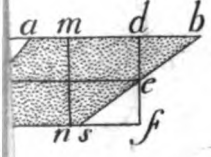
Fig. 9.

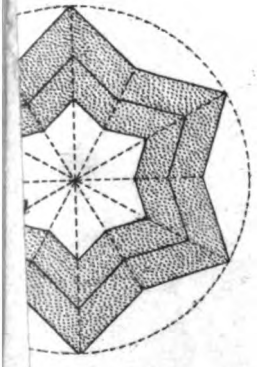
Fig. 10.

Digitized by Google

T. I.







Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIV OF MIC
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

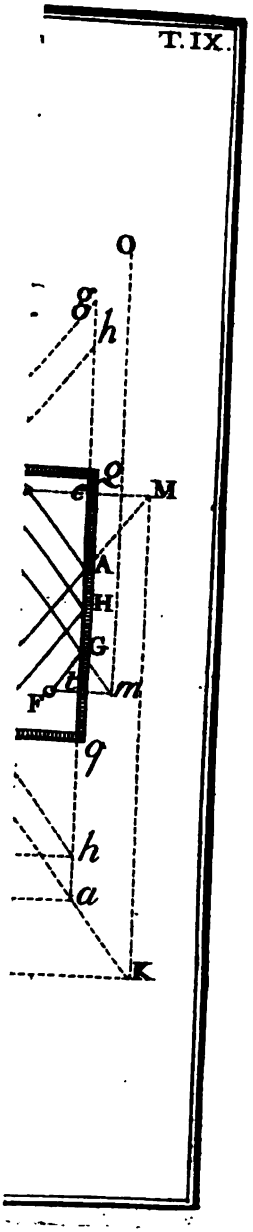
Digitized by Google

Digitized by Google

UNIV. OF MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

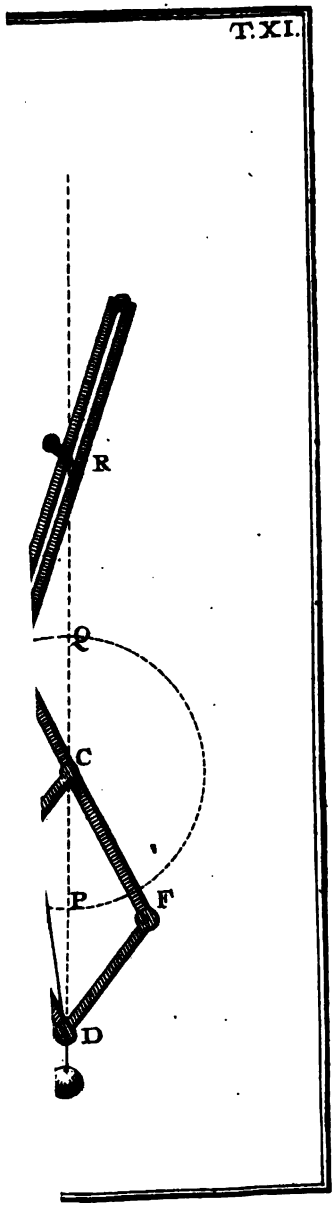


Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

T. XI.



UNIV. OF MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 70.

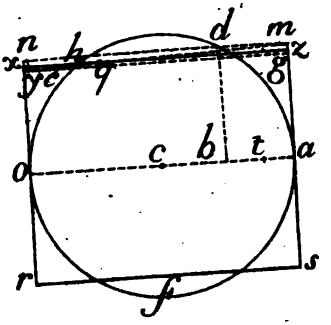
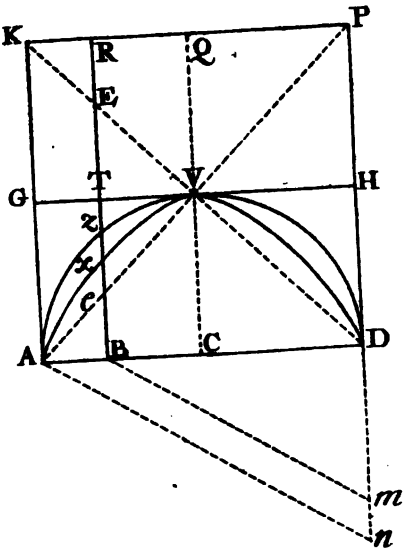


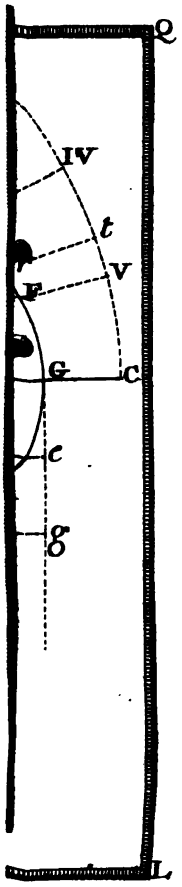
Fig. 72.



Digitized by Google

Digitized by Google

T. XIII.



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

B 448482
UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06710 1900
Digitized by Google

Digitized by Google